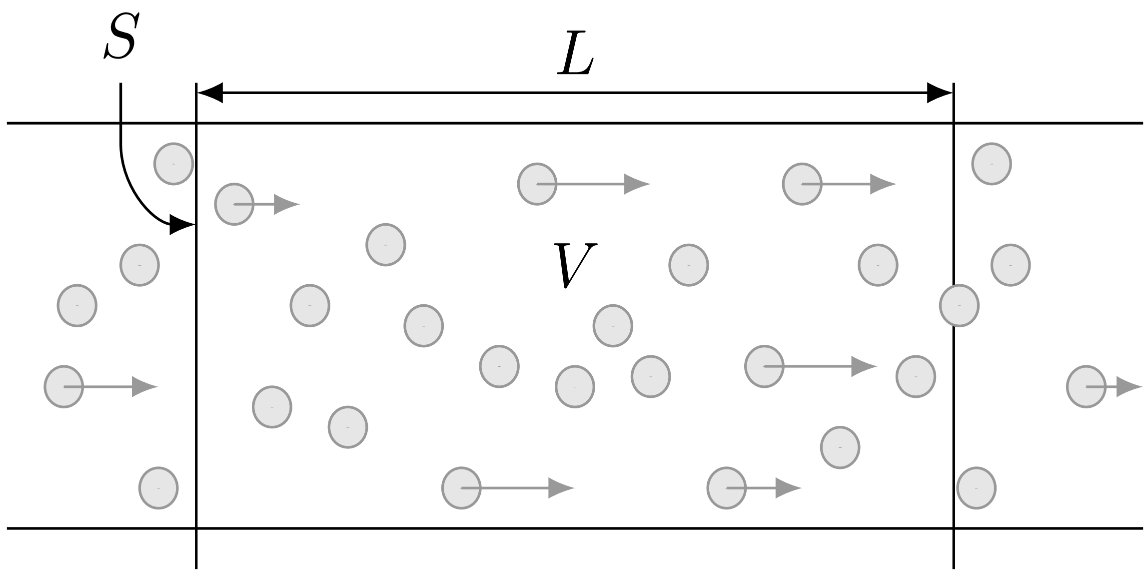
Outils géométriques et topologiques pour les écoulements diphasiques

Richard Saurel

Topologie d'un milieu diphasique



Comment calculer le volume occupé par les phases ?
Idem concernant l'aire interfaciale au travers de laquelle s'effectuent tous les échanges ?
Normale aux interfaces ?

Fonction caractéristique (ou fonction de phase) (filtre)

$$X_k = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad M \in \text{phase } k \\ \qquad 0 \ \text{sinon} \end{cases}$$

Cette fonction obéit à l'équation d'évolution

$$\frac{\partial X_k}{\partial t} + \vec{\sigma}.\mathrm{grad}(X_k) = 0$$

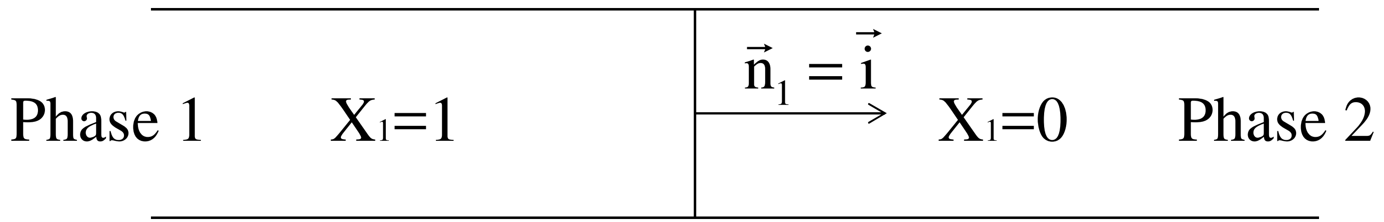
$\vec{\sigma}$ est la vitesse locale de l'interface (notée précédemment $\vec{S}$).

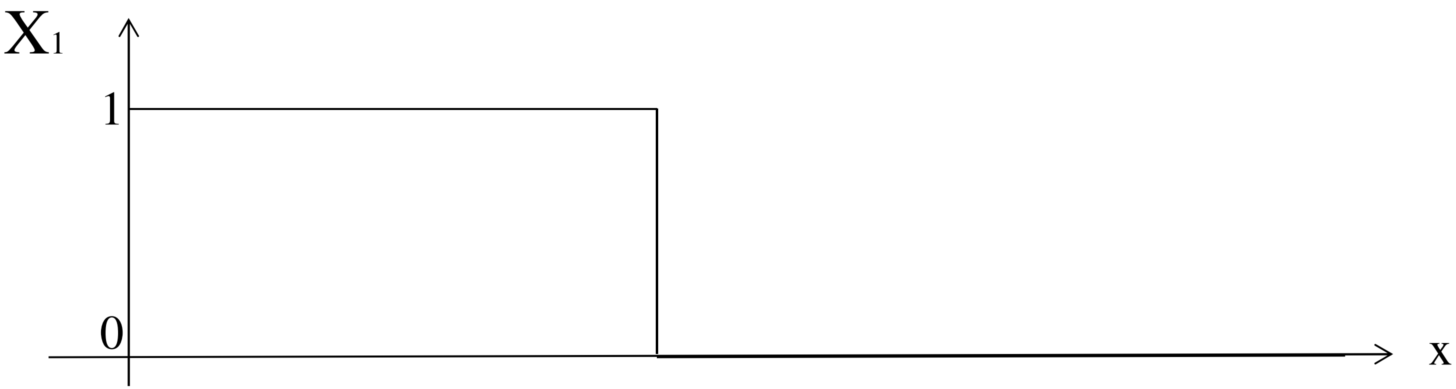
Normale à l'interface

$$\vec{n}_k = -\frac{\mathrm{grad}(X_k)}{\left|\mathrm{grad}(X_k)\right|}$$

Cherchons à nous convaincre de cette définition.

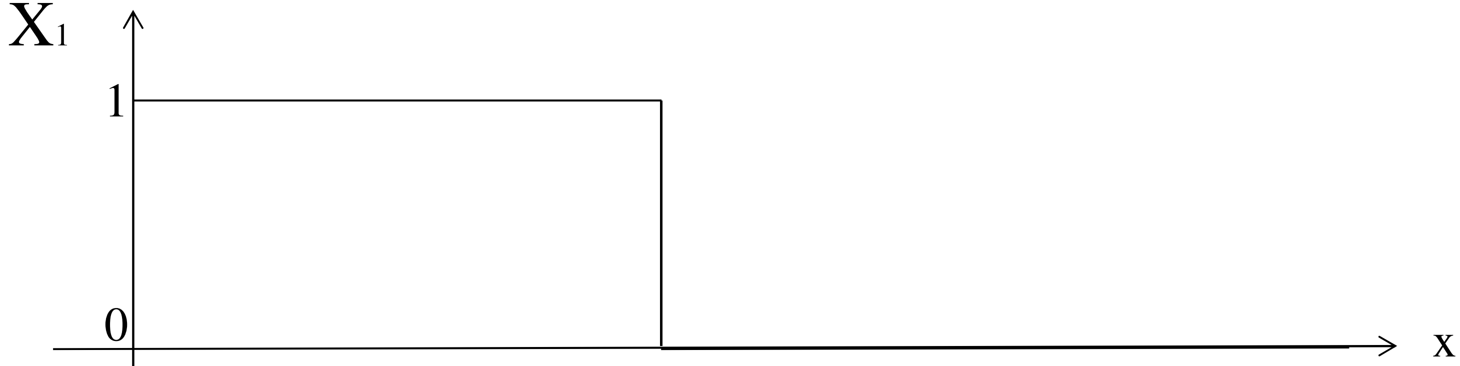
Cas 1D:

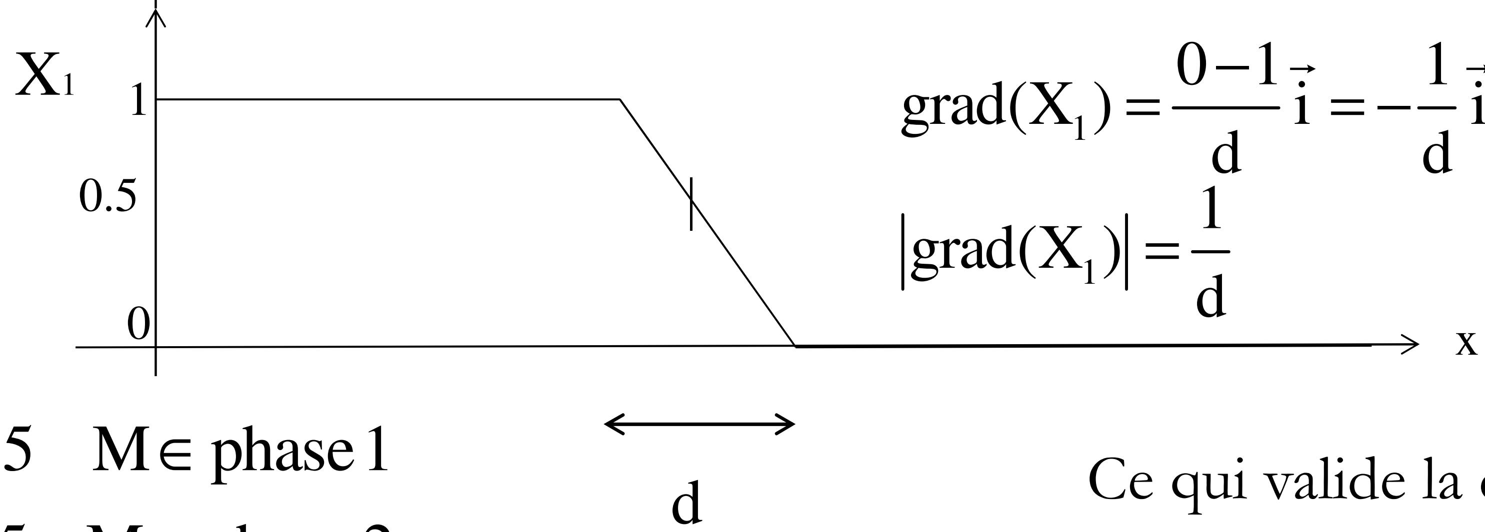




La gradient de X_1 est un peu problématique ici (c'est un Dirac).

Epaississons un peu l'interface





$$\mathrm{grad}(X_1) = \frac{0-1}{d}\vec{i} = -\frac{1}{d}\vec{i}$$

$$\left|\mathrm{grad}(X_1)\right| = \frac{1}{d}$$

$X_1 > 0.5 \quad M \in \text{phase } 1$

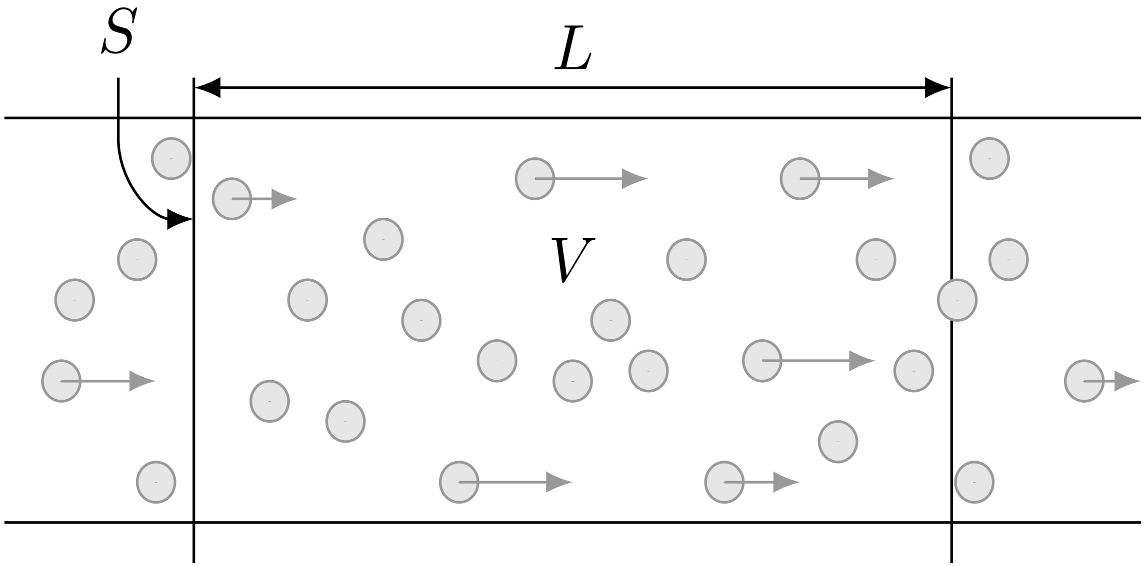
$X_1 < 0.5 \quad M \in \text{phase } 2$

$$\vec{n}_1 = -\frac{-\frac{1}{d}\vec{i}}{\frac{1}{d}} = \vec{i}$$

Ce qui valide la définition

$$\vec{n}_k = -\frac{\mathrm{grad}(X_k)}{\left|\mathrm{grad}(X_k)\right|}$$

Volume occupé par la phase 1



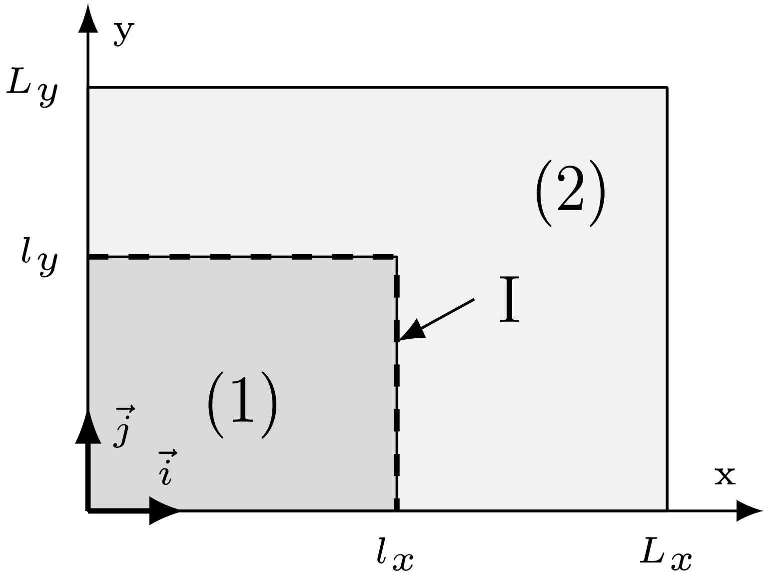
$$V_1 = \int_V X_1 \, dV = \int_{V_1} 1 \, dV + \int_{V_2} 0 \, dV = \int_{V_1} dV = V_1$$

Donc le volume de la phase sera donné par $V_1 = \int_V X_1 \, dV$

Aire interfaciale

$$A_I = -\int_V \text{grad}(X_k).\vec{n}_k dV$$

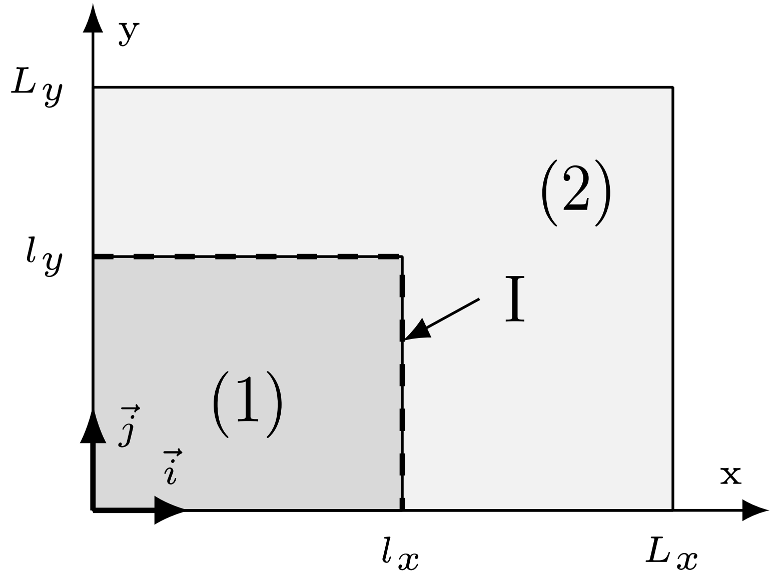
Cherchons à nous convaincre de cette définition.



Calculons,

$$\int_V \vec{\text{grad}}(X_k).\vec{n}_k \, dV = \int_0^{L_y}\int_0^{L_x}\left(\frac{\partial X_k}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial X_k}{\partial y}\vec{j}\right).\vec{n}_k dxdy$$

$$\int_V \vec{\text{grad}}(X_k).\vec{n}_k\,dV = \int_0^{L_y}\int_0^{L_x}\left(\frac{\partial X_k}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial X_k}{\partial y}\vec{j}\right).\vec{n}_k dxdy$$



$$\int_V \vec{\text{grad}}(X_1).\vec{n}_1 dV = \int_0^{L_y}\int_0^{L_x}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}\vec{i}\right).\vec{n}_1 dxdy + \int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\left(\frac{\partial X_1}{\partial y}\vec{j}\right).\vec{n}_1 dydx$$

$$\int_V \vec{\text{grad}}(X_1).\vec{n}_1 dV = \int_0^{L_y}\left(X_1(L_x,y)-X_1(0,y)\right)dy + \int_0^{L_x}\left(X_1(x,L_y)-X_1(x,0)\right)dx$$

$$\int_V \vec{\text{grad}}(X_1).\vec{n}_1 dV = \int_0^{l_y}(0-1)dy + \int_{l_y}^{L_y}(0-0)dy + \int_0^{l_x}(0-1)dx + \int_{l_x}^{L_x}(0-0)dx$$

$$\int_V \vec{\text{grad}}(X_k).\vec{n}_k dV = -l_y - l_x = -(l_x + l_y) = -A_I$$

Ce qui valide la définition $A_I = -\int_V \text{grad}(X_k).\vec{n}_k dV$

Récapitulatif

$$X_k = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad M \in \text{phase } k \\ \qquad 0 \ \text{sinon} \end{cases}$$

$$\frac{\partial X_k}{\partial t} + \vec{\sigma}.\text{grad}(X_k) = 0$$ Équation d'évolution durant le mouvement des phases.

$$\vec{n}_k = -\frac{\text{grad}(X_k)}{\left|\text{grad}(X_k)\right|}$$ Normale à l'interface.

$$V_k = \int_V X_k \ dV$$ Volume occupé par les phases.

$$A_I = -\int_V \text{grad}(X_k).\vec{n}_k dV$$ Aire interfaciale.