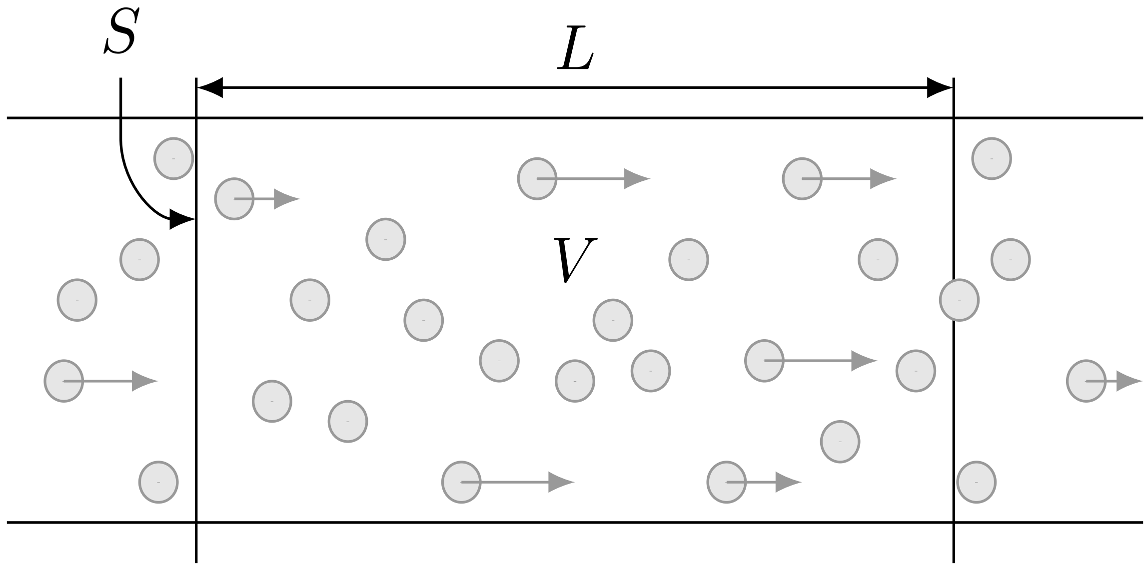
Opérations de sélection des phases et moyenne volumique des équations

Richard Saurel

Les équations de chaque phase pure sont connues…

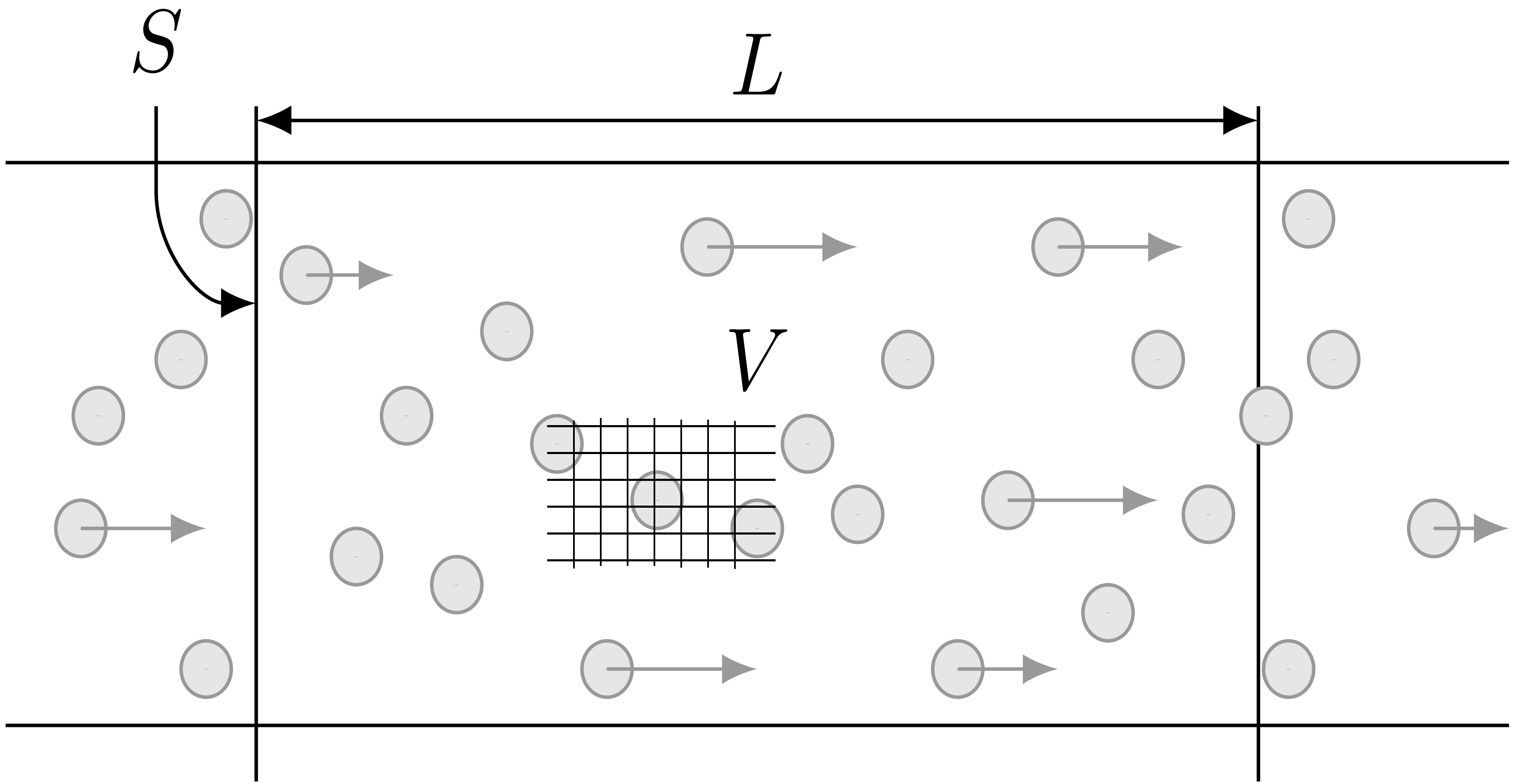


Chaque phase pure obéit aux equations d'Euler ou de Navier-Stokes.

Mais quelles sont les équations du milieu moyen ?

Plus précisément celles de chaque phase moyennée.

On ne peut pas résoudre ces équations à l'échelle de chaque bulle ou goutte



Dans $1m^3$ de mélange il y a typiquement 10^{12} gouttes ou bulles. Si chaque goutte nécessite 1000 mailles en 3D il n'y a pas d'ordinateur assez puissant. Actuellement les meilleurs calculateurs arrivent à traiter 10^9 mailles.

La méthode d'homogénéisation procède en trois étapes principales

1) Sélection de la phase à l'aide de la fonction caractéristique.

2) Prise de moyenne sur le volume de contrôle de mélange.

3) Détermination de certaines grandeurs interfaciales à l'aide de la seconde loi de la thermodynamique.

Selection de la phase

On multiplie l'équation de la masse par la fonction indicatrice.

$$X_k\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\vec{u})\right)=0$$

Immédiatement:

$$X_k\left(\frac{\partial \rho_k}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho_k\vec{u}_k)\right)=0$$

On fait entrer X_k dans les dérivées:

$$\frac{\partial X_k\rho_k}{\partial t}-\rho_k\frac{\partial X_k}{\partial t}+\operatorname{div}(X_k\rho_k\vec{u}_k)-\rho_k\vec{u}_k.\operatorname{grad}(X_k)=0$$

Mais, $\dfrac{\partial X_k}{\partial t}+\vec{\sigma}.\operatorname{grad}(X_k)=0$ donc, $\dfrac{\partial X_k}{\partial t}=-\vec{\sigma}.\operatorname{grad}(X_k)$

$$\frac{\partial X_k \rho_k}{\partial t} - \rho_k \frac{\partial X_k}{\partial t} + \mathrm{div}(X_k \rho_k \vec{u}_k) - \rho_k \vec{u}_k.\mathrm{grad}(X_k) = 0$$

$$\frac{\partial X_k \rho_k}{\partial t} + \rho_k \vec{\sigma}.\mathrm{grad}(X_k) + \mathrm{div}(X_k \rho_k \vec{u}_k) - \rho_k \vec{u}_k.\mathrm{grad}(X_k) = 0$$

$$\frac{\partial X_k \rho_k}{\partial t} + \mathrm{div}(X_k \rho_k \vec{u}_k) + \rho_k \left(\vec{\sigma} - \vec{u}_k\right).\mathrm{grad}(X_k) = 0$$

$$\frac{\partial X_k \rho_k}{\partial t} + \mathrm{div}(X_k \rho_k \vec{u}_k) = \rho_k \left(\vec{u}_k - \vec{\sigma}\right).\mathrm{grad}(X_k)$$

La condition d'interface réapparait.

Moyenne volumique

On prend la moyenne volumique de l'équation précédente:

$$\frac{1}{V}\int_V \left(\frac{\partial X_k \rho_k}{\partial t} + \mathrm{div}(X_k \rho_k \vec{u}_k) \right) dV = \frac{1}{V}\int_V \rho_k \left(\vec{u}_k - \vec{\sigma} \right).\mathrm{grad}(X_k) dV$$

On a ainsi 3 intégrales à calculer:

$$I_1 = \frac{1}{V}\int_V \frac{\partial X_k \rho_k}{\partial t} dV$$

$$I_2 = \frac{1}{V}\int_V \mathrm{div}(X_k \rho_k \vec{u}_k) dV$$

$$I_3 = \frac{1}{V}\int_V \rho_k \left(\vec{u}_k - \vec{\sigma} \right).\mathrm{grad}(X_k) dV$$

Calcul de la première intégrale

$$I_1 = \frac{1}{V}\int_V \frac{\partial X_k \rho_k}{\partial t} dV$$

$$I_1 = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{V}\int_V X_k \rho_k dV\right)$$ car le volume du mélange est fixe dans le temps.

$$I_1 = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{V}\int_{V_k} \rho_k dV\right)$$

Mais par définition de la moyenne dans la phase k:

$$\bar{\rho}_k = \frac{1}{V_k}\int_{V_k} \rho_k dV$$

$$I_1 = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{V_k}{V}\bar{\rho}_k\right)$$

On définit alors la fraction volumique: $\alpha_k = \frac{V_k}{V}$

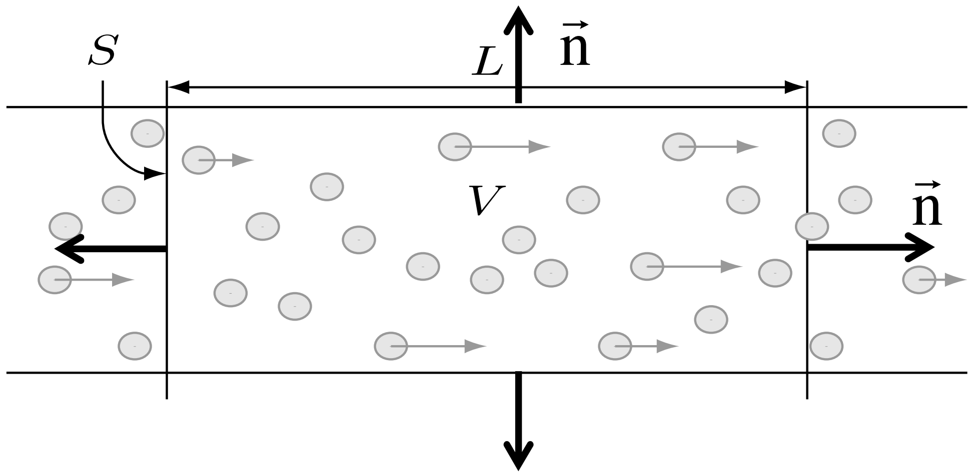
$$I_1 = \frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha_k \bar{\rho}_k\right)$$

$$I_1 = \frac{1}{V}\int_V \frac{\partial X_k \rho_k}{\partial t} dV \longrightarrow I_1 = \frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha_k \bar{\rho}_k\right)$$

Calcul de la deuxième intégrale

$$I_2 = \frac{1}{V}\int_V \mathrm{div}(X_k \rho_k \vec{u}_k)\,dV$$

$$I_2 = \frac{1}{V}\int_S X_k \rho_k \vec{u}_k.\vec{n}\,dS$$



Ne pas confondre $\vec{n}$ et $\vec{n}_k$.

$$I_2 = \frac{1}{S\times L}\left[\int_S \left(X_k \rho_k \vec{u}_k.\vec{n}\right)_{\text{entrée}} dS + \int_S \left(X_k \rho_k \vec{u}_k.\vec{n}\right)_{\text{sortie}} dS\right]$$

$$I_2 = \frac{1}{S\times L}\left[\int_{S_k} \left(\rho_k \vec{u}_k.\vec{n}\right)_{\text{entrée}} dS + \int_{S_k} \left(\rho_k \vec{u}_k.\vec{n}\right)_{\text{sortie}} dS\right]$$

On pose $\vec{u}_k = u_k \vec{i}$

$$I_2 = \frac{1}{S\times L}\left[\int_{S_k} \left(\rho_k u_k\right)_{\text{sortie}} dS - \int_{S_k} \left(\rho_k u_k\right)_{\text{entrée}} dS\right]$$

$$I_2 = \frac{1}{S \times L}\left[\int_{S_k} (\rho_k u_k)_{\text{sortie}}\, dS - \int_{S_k} (\rho_k u_k)_{\text{entrée}}\, dS\right]$$

Définissons les moyennes surfaciques:

$$\overline{\overline{\rho_k u_k}} = \frac{1}{S_k}\int_{S_k} (\rho_k u_k)\, dS$$

Alors,

$$I_2 = \frac{1}{S \times L}\left[\left(S_k \overline{\overline{\rho_k u_k}}\right)_{\text{sortie}} - \left(S_k \overline{\overline{\rho_k u_k}}\right)_{\text{entrée}}\right]$$

$$I_2 = \frac{\left(\frac{S_k}{S}\overline{\overline{\rho_k u_k}}\right)_{\text{sortie}} - \left(\frac{S_k}{S}\overline{\overline{\rho_k u_k}}\right)_{\text{entrée}}}{L}$$

En définissant les fractions surfaciques $\beta_k = \frac{S_k}{S}$ on a finalement

$$I_2 = \frac{\left(\beta_k \overline{\overline{\rho_k u_k}}\right)_{\text{sortie}} - \left(\beta_k \overline{\overline{\rho_k u_k}}\right)_{\text{entrée}}}{L}$$

Calcul de la troisième intégrale

$$I_3 = \frac{1}{V}\int_V \rho_k\left(\vec{u}_k - \vec{\sigma}\right).\mathrm{grad}(X_k)dV$$

Or, $dA_I = -\mathrm{grad}(X_k).\vec{n}_k dV$

$$\vec{n}_k dA_I = -\mathrm{grad}(X_k)\vec{n}_k.\vec{n}_k dV$$

$$\vec{n}_k dA_I = -\mathrm{grad}(X_k)dV$$

$$I_3 = -\frac{1}{V}\int_V \rho_k\left(\vec{u}_k - \vec{\sigma}\right).\vec{n}_k dA_I$$

On pose, $m_k = \rho_k\left(\vec{\sigma} - \vec{u}_k\right).\vec{n}_k$

$$I_3 = \frac{1}{V}\int_V m_k dA_I$$

Si m_k est supposé constant autour de chaque bulle ou goutte dans le volume de contrôle,

$$I_3 = \frac{A_I m_k}{V}$$

En regroupant les trois termes

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha_k \overline{\rho}_k\right) + \frac{\left(\beta_k \overline{\overline{\rho_k u_k}}\right)_{\text{sortie}} - \left(\beta_k \overline{\overline{\rho_k u_k}}\right)_{\text{entrée}}}{L} = \frac{A_I m_k}{V}$$

En passant à la limite $L \to 0^+$ $\quad \beta_k \to \alpha_k \quad \overline{\overline{f}} \longrightarrow \overline{f}$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha_k \overline{\rho}_k\right) + \frac{\partial \alpha_k \overline{\rho_k u_k}}{\partial x} = \frac{A_I m_k}{V}}$$

On a ainsi l'équation de masse moyennée pour la phase k.

En sommant les équations des deux phases

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha_1 \overline{\rho}_1 + \alpha_2 \overline{\rho}_2\right) + \frac{\partial\left(\alpha_1 \overline{\rho_1 u_1} + \alpha_2 \overline{\rho_2 u_2}\right)}{\partial x} = \frac{A_I (m_1 + m_2)}{V} = 0$$

La masse du mélange est conservée.

Importance de l'aire interfaciale spécifique $\frac{A_I}{V}$

$\alpha_{\text{particules}} = 0.01$ par exemple

$$\alpha_{\text{particules}} = \frac{V_{\text{part}}}{V} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_p^3 . N_{\text{part}}}{V}$$

$$\frac{A_I}{V} = \frac{4\pi R_p^2 . N_{\text{part}}}{V}$$

Donc, $\dfrac{\frac{A_I}{V}}{\alpha_p} = \dfrac{\frac{4\pi R_p^2 . N_{\text{part}}}{V}}{\frac{\frac{4}{3}\pi R_p^3 . N_{\text{part}}}{V}} = \dfrac{3}{R_p} \longrightarrow \dfrac{A_I}{V} = \dfrac{3\alpha_p}{R_p}$

Considérons, $R_p = 10^{-6}$m (encens, spays moteurs diesel, ...) $\frac{A_I}{V} = 30\,000\text{m}^2$

3 terrains de foot dans 1 mètre cube de mélange….

Equation du mouvement moyennée

$$X_k\left(\frac{\partial\rho\vec{u}}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\vec{u}\times\vec{u})+\mathrm{grad}(p)\right)=0$$

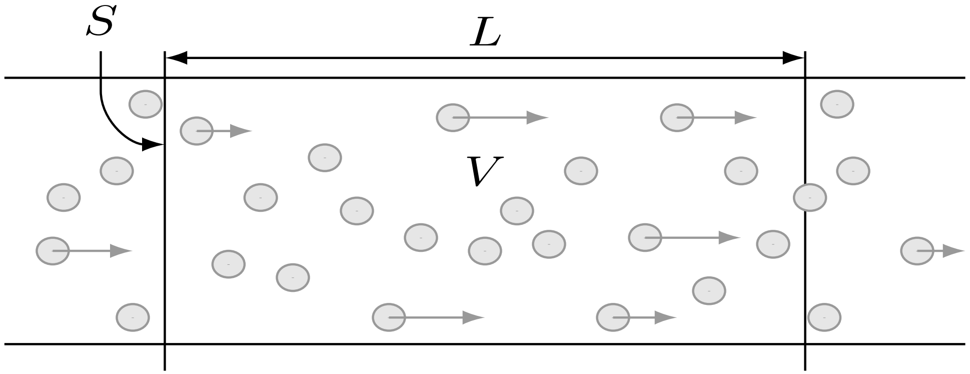
$$\frac{\partial X_k\rho_k\vec{u}_k}{\partial t}+\mathrm{div}(X_k\rho_k\vec{u}_k\times\vec{u}_k)+\mathrm{grad}(X_k p_k)=\rho_k\vec{u}_k(\vec{u}_k-\vec{\sigma}).\mathrm{grad}(X_k)+p_k\mathrm{grad}(X_k)$$

$$\frac{\partial\alpha_k\overline{\rho_k u_k}}{\partial t}+\frac{\partial\alpha_k(\overline{\rho_k u_k^2}+\bar{p}_k)}{\partial x}=\frac{1}{V}\int_{A_I}\left(\rho_k\vec{u}_k(\vec{\sigma}-\vec{u}_k).\vec{n}_k-p_k\vec{n}_k\right)dA_I$$

$$\frac{\partial\alpha_k\overline{\rho_k u_k}}{\partial t}+\frac{\partial\alpha_k(\overline{\rho_k u_k^2}+\bar{p}_k)}{\partial x}=\frac{1}{V}\int_{A_I}\left(m_k\vec{u}_k-p_k\vec{n}_k\right)dA_I$$

Par la suite, pour des raisons de simplicité, on supprime le transfert de masse.

$$\frac{\partial \alpha_k \overline{\rho_k u_k}}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k (\overline{\rho_k u_k^2} + \bar{p}_k)}{\partial x} = \frac{1}{V} \int_{A_I} -p_k \vec{n}_k dA_I$$

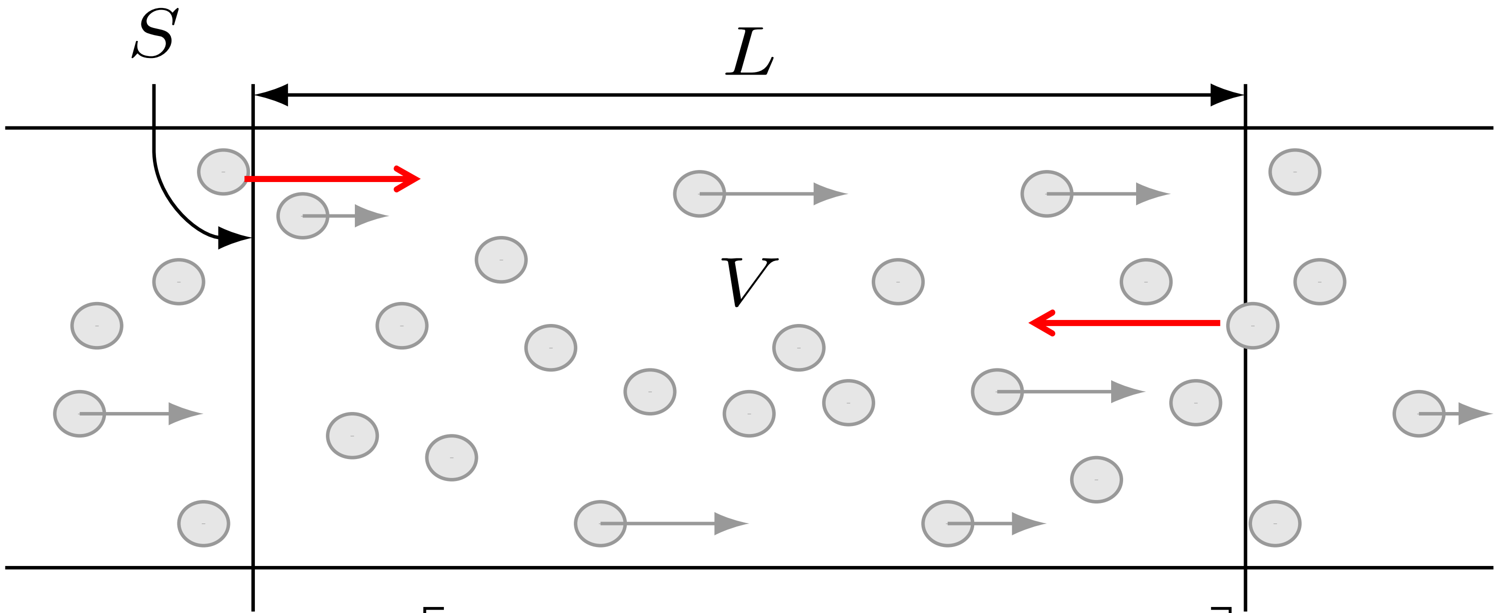


Distinguons les interfaces internes au volume de contrôle de celles qui sont sur les bords de maille.
Les premières sont des surfaces fermées alors que les secondes sont ouvertes.
Pour les surfaces internes (fermées):

$$\frac{1}{V} \int_{A_{I,\text{int erne}}} -p_k \vec{n}_k dA_I = 0 \quad \text{pour des raisons de symétrie}$$

Il reste,

$$\frac{1}{V} \int_{A_{I,\text{bord}}} -p_k \vec{n}_k dA_I = -\frac{1}{V} \left[\int_{A_{I,\text{bord},\text{entrée}}} p_k \vec{n}_k dA_I + \int_{A_{I,\text{bord},\text{sortie}}} p_k \vec{n}_k dA_I \right]$$



$$\frac{1}{V}\int_{A_{I,bord}} -p_k\vec{n}_k dA_I = -\frac{1}{V}\left[\int_{A_{I,bord,entrée}} p_k\vec{n}_k dA_I + \int_{A_{I,bord,sortie}} p_k\vec{n}_k dA_I\right]$$

$$\frac{1}{V}\int_{A_{I,bord}} -p_k\vec{n}_k dA_I = -\frac{1}{S\times L}\left[\int_{A_{I,bord,entrée}} p_I\vec{i}\, dA_I + \int_{A_{I,bord,sortie}} p_I(-\vec{i})dA_I\right]$$

$$\frac{1}{V}\int_{A_{I,bord}} -p_k\vec{n}_k dA_I = \frac{1}{S\times L}\left[p_I A_{I,sortie} - p_I A_{I,entrée}\right]\vec{i}$$

$$\frac{1}{V}\int_{A_{I,bord}} -p_k\vec{n}_k dA_I = p_I\frac{\beta_{I,sortie} - \beta_{I,entrée}}{L}\vec{i}$$

p_I est le même en entrée et en sortie puisque dans le volume de contrôle V les variables de chaque phase sont uniformes.

Equation du mouvement moyennée

$$\frac{\partial \alpha_k \overline{\rho_k u_k}}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k (\overline{\rho_k u_k^2} + \bar{p}_k)}{\partial x} = \frac{1}{V} \int_{A_I} -p_k \vec{n}_k dA_I$$

$$\frac{\partial \alpha_k \overline{\rho_k u_k}}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k (\overline{\rho_k u_k^2} + \bar{p}_k)}{\partial x} = p_I \frac{\beta_{I,\text{sortie}} - \beta_{I,\text{entrée}}}{L}$$

En passant à la limite $L \to 0^+$ $\beta_k \to \alpha_k$

$$\boxed{\frac{\partial \alpha_k \overline{\rho_k u_k}}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k (\overline{\rho_k u_k^2} + \bar{p}_k)}{\partial x} = p_I \frac{\partial \alpha_k}{\partial x}}$$

Equation d'énergie moyennée

$$X_k\left(\frac{\partial \rho E}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho E+p)\vec{u})\right)=0$$

$$\frac{\partial X_k \rho_k E_k}{\partial t}+\mathrm{div}\left(X_k(\rho_k E_k+p_k)\vec{u}_k\right)=\rho_k E_k(\vec{u}_k-\vec{\sigma}).\mathrm{grad}(X_k)+p_k\vec{u}_k\mathrm{grad}(X_k)$$

$$\frac{\partial \alpha_k \overline{\rho_k E_k}}{\partial t}+\frac{\partial \alpha_k \bar{u}_k(\overline{\rho_k E_k}+\bar{p}_k)}{\partial x}=\frac{1}{V}\int_{A_I}\left(\overline{\rho_k E_k}(\vec{\sigma}-\vec{u}_k).\vec{n}_k-p_k\bar{u}_k\vec{n}_k\right)dA_I$$

$$\frac{\partial \alpha_k \overline{\rho_k E_k}}{\partial t}+\frac{\partial \alpha_k \bar{u}_k(\overline{\rho_k E_k}+\bar{p}_k)}{\partial x}=\frac{1}{V}\int_{A_I}\left(m_k\overline{E_k}-p_k\overline{\vec{u}_k}\vec{n}_k\right)dA_I$$

Pour des raisons de simplicité, on supprime à nouveau le transfert de masse.

$$\frac{\partial \alpha_k \overline{\rho_k E_k}}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k \bar{u}_k (\overline{\rho_k E_k} + \bar{p}_k)}{\partial x} = -\frac{1}{V}\int_{A_I} p_k \overline{\vec{u}_k} \vec{n}_k dA_I$$

En suivant la même raisonnement que pour le membre de droite de l'équation du mouvement, on obtient:

$$\frac{\partial \alpha_k \overline{\rho_k E_k}}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k \bar{u}_k (\overline{\rho_k E_k} + \bar{p}_k)}{\partial x} = p_I u_I \frac{\partial \alpha_k}{\partial x}$$

On a maintenant les 3 équations de bilan pour chaque phase.

Equations de bilan des phases

$$\boxed{\begin{aligned}
&\frac{\partial \alpha_k \rho_k}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k \rho_k u_k}{\partial x} = 0 \\
&\frac{\partial \alpha_k \rho_k u_k}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k (\rho_k u_k^2 + p_k)}{\partial x} = p_I \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} \\
&\frac{\partial \alpha_k \rho_k E_k}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k u_k (\rho_k E_k + p_k)}{\partial x} = p_I u_I \frac{\partial \alpha_k}{\partial x}
\end{aligned}}$$

La conservation du mélange est assurée:

$$\frac{\partial\left(\alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2\right)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_1\rho_1 u_1 + \alpha_2\rho_2 u_2)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial(\alpha_1\rho_1 u_1 + \alpha_2\rho_2 u_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_1\rho_1 u_1^2 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2\rho_2 u_1^2 + \alpha_2 p_2)}{\partial x} = p_I \frac{\partial \alpha_1 + \alpha_2}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial\left(\alpha_1\rho_1 E_1 + \alpha_2\rho_2 E_2\right)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\alpha_1 u_1(\rho_1 E_1 + p_1) + \alpha_2 u_2(\rho_2 E_2 + p_2)\right)}{\partial x} = p_I u_I \frac{\partial \alpha_1 + \alpha_2}{\partial x} = 0$$

Combien y a t il d’inconnues?

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k \rho_k u_k}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k u_k}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k (\rho_k u_k^2 + p_k)}{\partial x} = p_I \frac{\partial \alpha_k}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k E_k}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k u_k (\rho_k E_k + p_k)}{\partial x} = p_I u_I \frac{\partial \alpha_k}{\partial x}$$

Nécessité d’une équation
d’évolution supplémentaire.

$\alpha_1;$

$\rho_k; \quad u_k; \quad p_k; \quad E_k; \longrightarrow$ 4 inconnues, mais 3 relations
+ équation d’état.

$p_I; \quad u_I.$

2 variables à déterminer en fonction des
autres variables du dessus.
Le guide que nous allons suivre est la
seconde loi de la thermodynamique.

Combien y a t il d'inconnues?

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k \rho_k u_k}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k u_k}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k (\rho_k u_k^2 + p_k)}{\partial x} = p_I \frac{\partial \alpha_k}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k E_k}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k u_k (\rho_k E_k + p_k)}{\partial x} = p_I u_I \frac{\partial \alpha_k}{\partial x}$$

Nécessité d'une équation d'évolution supplémentaire. (une seule équation suffit car $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$)

$\alpha_1;$

$\rho_k; \quad u_k; \quad p_k; \quad E_k;$

4 inconnues, mais 3 relations
+ équation d'état.

$p_I; \quad u_I.$

2 variables à déterminer en fonction des autres variables du dessus.
Le guide que nous allons suivre est la seconde loi de la thermodynamique.