

# Introduction aux méthodes numériques pour les écoulements instationnaires



Richard SAUREL

**Objectif :** L'objectif de ce cours est d'étudier la modélisation des écoulements fluides (compressibles, non visqueux) et les méthodes de résolution de ces modèles.

**Programme :**

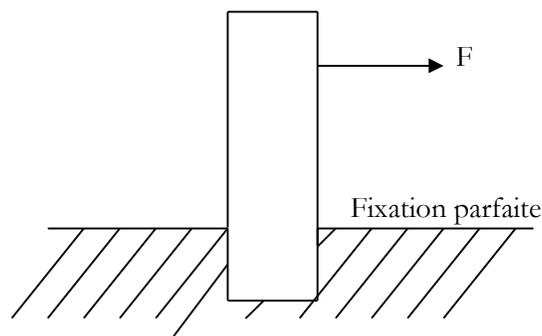
- 1. Modèles d'écoulements fluides.** Equations d'Euler. Exemples de lois d'état. Sous modèles des équations d'Euler.
- 2. Discrétisation des systèmes hyperboliques.** Résolution du problème de Riemann et du problème de Riemann linéarisé. Schémas numériques dans le cas unidimensionnel puis multidimensionnel.
- 3. Traitement des conditions aux limites.**

# Chapitre 1. Modèles d'écoulements fluides

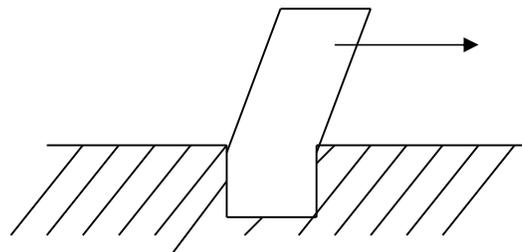
Un fluide est à priori tout ce qui n'est pas solide (liquides et gaz). Mais la notion de solide n'est pas satisfaisante. Il existe en effet des solides assez fluides comme par exemple les bitumes. Il existe aussi des conditions de pression et de vitesse pour lesquelles les solides se comportent comme des fluides, et à la limite comme des gaz. C'est le cas en particulier en détonique, où les pressions atteignent plusieurs centaines de milliers d'atmosphères.

La notion de fluidité est plutôt associée à la vitesse de déplacement interne de la matière.

Considérons un barreau de matière et appliquons lui une force tendant à le cisailer:



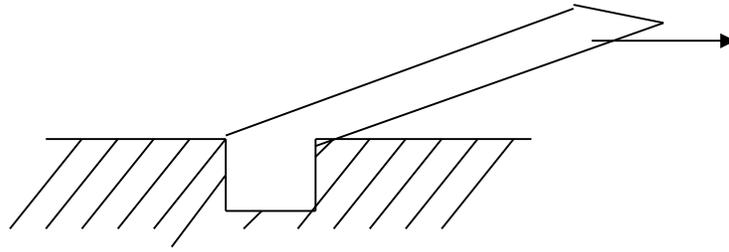
Cas d'un solide :



On a produit une déformation de la matrice cristalline, mais sans glissement des couches cristallines du solide les unes sur les autres. Lorsque la force  $\vec{F}$  est supprimée, la déformation s'annule, et le solide retrouve sa position initiale. Le solide s'est comporté comme un corps élastique. Ceci reste vrai pour des déformations modérées.

Si la déformation est plus intense, les couches cristallines vont glisser les unes sur les autres : le matériau va se plastifier et ne retrouvera plus sa position initiale. Cette situation est un cas intermédiaire entre la mécanique des solides élastiques et la mécanique des fluides.

Pour un fluide, liquide ou gazeux, l'application d'une force de cisaillement va provoquer une déformation qui va se prolonger de façon continue tant que la force sera maintenue.



L'effet des forces de cisaillement est donc la meilleure mesure macroscopique de la fluidité d'un matériau.

Un fluide est donc un milieu qui se déforme de façon continue si on lui applique des forces de cisaillement.

Nous allons porter notre attention essentiellement sur des écoulements de fluides compressibles non visqueux, non conducteurs de la chaleur (c'est à dire non dissipatifs): les contraintes au sein du fluide sont dues seulement à la pression.

La nature du fluide et les niveaux de pression sont suffisamment élevés pour que le fluide subisse des variations de densité sensibles. C'est le cas en :

- aérodynamique avec les écoulements de gaz,
- combustion: écoulements de gaz véhiculant des espèces chimiques réactives libérant de l'énergie (donc provoquant des variations de température, pression et densité),
- écoulements multiphasiques: gaz transportant des particules liquides ou solides (sprays, brouillards), écoulements de liquides avec des bulles de gaz, mélanges de fluides,
- détonique: explosifs et matériaux solides ou gazeux aux très hautes pressions (100 000 atm).

### 1.1 Equations de la dynamique des fluides parfaits. Equations d'Euler

Les fluides parfaits sont des fluides non visqueux et non conducteurs de la chaleur: non dissipatifs. Considérer qu'un fluide suit un tel comportement est d'autant plus vrai que sa conductivité thermique et sa viscosité sont faibles (gaz), ou que l'on ne s'intéresse qu'aux phénomènes se produisant relativement loin des parois, c'est à dire lorsque les tensions de cisaillement et le flux de chaleur sont faibles.

Un fluide doit être considéré comme compressible lorsque sa densité subit des variations. Ces variations peuvent avoir deux provenances :

- Modifications de la densité lors d'un échauffement/refroidissement (d'une variation de température en fait). Dans ce cas, la variation de la densité du fluide est due à sa **dilatation**.

Si les variations de température sont faibles, les variations de densité le seront aussi, et le fluide pourra être modélisé comme un matériau incompressible.

- La densité peut aussi varier en raison de modifications de la pression. Dans ce cas, la variation de densité est réellement due à sa **compressibilité**. Dans ce cas, le fluide doit être considéré compressible.

Comme  $\rho = \rho(P, T)$ ,

$$d\rho = \left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T dP + \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P dT$$

le terme  $\left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T$  représente la compressibilité isotherme du matériau,

tandis que le terme  $\left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P$  représente la dilatabilité isobare du matériau.

En fonction du type de problème à traiter, le poids de ces termes doit être évalué afin de choisir le modèle d'écoulement fluide : compressible ou incompressible.

Dans toutes les situations, un fluide doit être considéré comme compressible lorsque l'écoulement atteint de grandes vitesses, ou plus précisément lorsque le nombre de Mach s'éloigne de zéro.

Le nombre de Mach d'un écoulement est défini par le rapport du module de la vitesse du fluide, sur la vitesse du son :  $M = u / c$ .

Exemple : Dans la salle où nous travaillons, les radiateurs élèvent la température de l'air, et ce dernier se met en mouvement : il s'agit de convection naturelle.

On a l'habitude de considérer l'air comme un fluide compressible, mais est-ce nécessaire pour traiter ce problème de convection ?

Les variations de température sont modérées, mais responsable de son mouvement par la poussée d'Archimède. Le fluide doit donc être considéré dilatable. Les variations de pressions sont négligeables, et donc on a tendance à la considérer comme incompressible. Ceci est confirmé par le fait que le nombre de Mach est très proche de zéro.

Un modèle incompressible utilisant l'approximation de Boussinesq conviendra pour une telle étude.

Si maintenant un allume un grand feu au milieu de la pièce, les variations de température seront telles que l'écoulement ne peut plus être modélisé suivant l'approche de Boussinesq. Les variations de densité sont trop grandes (voir la loi d'état). On doit le traiter comme compressible même si le nombre de Mach tend toujours vers zéro.

Si maintenant, avec le même air, chaud ou froid, nous créons un écoulement à grande vitesse par utilisation d'une soufflerie par exemple, le nombre de Mach sera élevé (en pratique, dès qu'il est supérieur à 0.01 – 0.1, la compressibilité intervient) et on doit obligatoirement adopter un modèle d'écoulement compressible.

C'est le cas pour toutes les applications en aérodynamique.

Les équations de la dynamique des fluides (appelées aussi équations de la dynamique des gaz, ou modèles d'aérodynamique) s'obtiennent en appliquant les lois fondamentales de la physique qui traduisent les principes de conservation de la masse, quantité de mouvement et énergie.

### 1.1.1 Dérivées temporelle

Avant d'appliquer les différents principes de conservation on rappelle certains concepts nécessaires. Considérons un champ scalaire  $\phi = \phi(x, y, z, t)$ . La variation temporelle de  $\phi$  enregistrée par un observateur se déplaçant à la vitesse du fluide  $\vec{V} = (u, v, w)$  est donnée par:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad}\phi$$

L'opérateur de dérivation  $\frac{d}{dt}$  en suivant la particule fluide est souvent appelé dérivée particulière

ou dérivée matérielle. Le premier terme  $\frac{\partial\phi}{\partial t}$  représente la dérivée partielle par rapport au temps, c'est à dire la variation locale de  $\phi$ . Le second terme représente la dérivée convective.

Considérons maintenant un volume  $V$  fermé par une surface  $A$  se déplaçant avec le matériau. La quantité de la grandeur  $\phi$  contenue dans le volume  $V$  s'écrit:

$$\Psi(t) = \int_V \phi(x, y, z, t) dV$$

La dérivée matérielle de la grandeur  $\Psi(t) = \int_V \phi(x, y, z, t) dV$  s'écrit (théorème de Reynolds):

$$\frac{d\Psi}{dt} = \int_V \frac{\partial\phi}{\partial t} dV + \int_A (\vec{n} \cdot \phi \vec{V}) dA \quad \vec{n} \text{ représente la normale unitaire sortante à la surface } A.$$

Le premier terme représente la contribution locale du champ  $\phi$  dans la variation temporelle de  $\Psi$  tandis que le second terme représente la contribution liée au mouvement de la surface  $A$  se déplaçant à la vitesse  $\vec{V}$ .

La seconde intégrale peut être transformée en une intégrale de volume à l'aide du théorème de Gauss:

$$\int_A (\vec{n} \cdot \vec{\phi}) dA = \int_V \text{div} \vec{\phi} dV$$

Lorsque  $\Psi$  est un vecteur, le théorème de Reynolds devient :

$$\frac{d\Psi}{dt} = \int_V \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t} dV + \int_A (\vec{n} \cdot \vec{\phi} \otimes \vec{V}) dA$$

or comme  $\vec{n} \cdot (\vec{\phi} \otimes \vec{V}) = \vec{\phi}(\vec{n} \cdot \vec{V})$ , on a aussi:

$$\frac{d\Psi}{dt} = \int_V \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t} dV + \int_A \vec{\phi}(\vec{n} \cdot \vec{V}) dA$$

### 1.1.2 Conservation de la masse

Le principe de conservation de la masse spécifie que la masse  $M$ , contenue dans le volume  $V$  ayant pour densité  $\rho$  se conserve lors du mouvement.

$$M(t) = \int_V \rho(x, y, z, t) dV$$

Ainsi, aucune masse n'est générée à l'intérieur du volume  $V$ , et puisque la surface  $A$  se déplace à la vitesse du fluide  $\vec{V}$ , aucun flux de masse ne traverse cette surface. On obtient alors, en substituant  $\Psi$  par  $M$  et  $\phi$  par  $\rho$  :

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dM}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_A (\vec{n} \cdot \rho \vec{V}) dA = 0$$

On applique maintenant le théorème de Gauss et on obtient:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \text{div}(\rho \vec{V}) dV = 0$$

Comme le volume  $V$  est arbitraire, l'équation de conservation de la masse ou équation de continuité s'écrit:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0$$

### 1.1.3 Conservation de la quantité de mouvement

La quantité de mouvement contenue dans le volume  $V$  s'écrit :

$$\Psi(t) = \int_V \rho \vec{V} dV$$

La loi de Newton, ou principe fondamental de la dynamique s'énonce : *La variation temporelle de quantité de mouvement dans le volume  $V$  est égale à la somme des forces agissant sur le volume  $V$ .*

Les forces se décomposent en forces de volume ou forces de masse et en forces de surface.

Les forces de volume agissent sur chaque élément de masse du milieu et sont transmises à la matière sans nécessité d'un contact physique. Ce sont par exemple la force de gravitation, les forces électro-magnétiques (s'il existe des charges électriques dans le milieu). Ces forces ne posent pas de problème particulier mais alourdiraient l'écriture. De plus elles sont négligeables dans la plupart des situations (pour les problèmes d'aérodynamique).

Les forces de surface sont d'origine moléculaire. Elles ne peuvent donc être transmises à la masse de contrôle considérée que par l'intermédiaire des molécules voisines de la surface de contrôle. Elles résultent d'actions de contact et ne peuvent donc agir que sur une couche voisine de la surface de contrôle. En négligeant les forces visqueuses, il ne reste plus alors que les forces de pression.

La pression exerce une action opposée au sens de la normale extérieure de la surface  $\mathcal{A}$  délimitant le volume  $V$ .

$$\text{Ainsi : } F_p = - \int_{\mathcal{A}} P \vec{n} dA$$

$$\text{La loi de Newton s'écrit : } \frac{d\psi}{dt} = F_p$$

C'est à dire:

$$\int_V \frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} dV + \int_{\mathcal{A}} \vec{n} \cdot \rho \vec{V} \otimes \vec{V} dA = - \int_{\mathcal{A}} P \vec{n} dA$$

En appliquant le théorème de Gauss aux intégrales de surface on obtient:

$$\int_V \frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} dV + \int_V [\text{div}(\rho \vec{V} \otimes \vec{V}) + \text{grad}(P)] dV = 0$$

Comme  $V$  est arbitraire, l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit:

$$\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V} \otimes \vec{V}) + \text{grad}(P) = 0$$

#### 1.1.4 Conservation de l'énergie

Comme précédemment, on considère maintenant l'énergie totale contenue dans le volume  $V$  :

$$\Psi(t) = \int_V \rho E dV$$

avec  $E = e + 1/2 \vec{V} \cdot \vec{V}$  énergie totale

$e$  représente l'énergie interne stockée dans le fluide sous forme d'agitation moléculaire translationnelle, vibrationnelle, rotationnelle. C'est en fait l'énergie thermique. L'autre terme représente l'énergie cinétique.

Le premier principe de la thermodynamique ou principe de conservation de l'énergie s'énonce:  
*La variation d'énergie totale est égale au travail fourni par unité de temps par toutes les forces agissant sur le système, augmenté du flux d'énergie échangé avec l'extérieur par unité de temps.*

Comme le fluide est non conducteur de la chaleur, il n'y a aucun flux d'énergie échangé avec l'extérieur.

Rappelons qu'une force  $\vec{F}$  agissant sur un point se déplaçant à la vitesse  $\vec{V}$  produit une puissance  $\vec{F} \cdot \vec{V}$ . Les seules forces que nous avons à traiter sont les forces de pression. Le travail associé par unité de temps (ou puissance) s'écrit :

$$E_{FP} = - \int_A P \vec{V} \cdot \vec{n} dA$$

Le premier principe de la thermodynamique s'écrit :

$$\frac{d\psi}{dt} = E_{FP}$$

c'est à dire:

$$\int_V \frac{\partial \rho E}{\partial t} dV + \int_A \vec{n} \cdot (\rho E \vec{V}) dA = - \int_A P \vec{V} \cdot \vec{n} dA$$

En appliquant le théorème de Gauss aux intégrales de surface on obtient :

$$\int_V \frac{\partial \rho E}{\partial t} dV + \int_V \text{div}((\rho E + P) \vec{V}) dV = 0$$

Comme  $V$  est arbitraire, l'équation de conservation de l'énergie s'écrit :

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \text{div}((\rho E + P) \vec{V}) = 0$$

### 1.1.5 Système formé par les équations d'Euler

Les équations de conservation précédentes mettent en évidence les couplages entre la densité, la quantité de mouvement et l'énergie totale. La pression est donnée par une loi d'état du type  $P = P(\rho, e)$  caractéristique du fluide et augmentant ainsi les couplages dans ce système. Le système à considérer est donc :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V} \otimes \vec{V}) + \text{grad}(P) = 0$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \text{div}((\rho E + P)\vec{V}) = 0$$

Avec :  $E = e + 1/2 \vec{V} \cdot \vec{V}$  et  $P = P(\rho, e)$ .

Ce modèle est valide lorsque :

- les forces de volume (pesanteur, champ magnétique, champ électrique, etc.) sont négligées,
- les effets dissipatifs (effets liés à la viscosité, à la conductivité thermique du fluide) sont négligés,
- en absence de réaction chimique,
- pour un milieu monophasique (gaz pur, ou liquide pur etc.).

Lorsque les effets dissipatifs sont considérés, des termes supplémentaires apparaissent alors à droite du signe “=” dans les équations du mouvement et d’énergie. Les effets dissipatifs jouent un rôle important lorsqu’on s’intéresse en particulier aux phénomènes se produisant à proximité des parois.

Lorsque de tels termes sont présents, on peut toujours chercher la solution comme superposition d’un problème où seuls les termes dissipatifs sont présents, et d’un autre problème où les effets dissipatifs sont absents.

Ainsi, dans le cadre d’une méthode numérique, durant un pas de temps, on résout de façon séparée les équations d’Euler avec une méthode adaptée, et sur le même pas de temps, parallèlement on résout un système simplifié où seuls les effets dissipatifs sont présents. La solution au bout du pas de temps est obtenue par superposition des deux contributions.

Dans la suite nous allons nous intéresser à l’étude et à la résolution seulement de la partie non dissipative, c’est à dire aux équations d’Euler ou à des systèmes possédants des propriétés semblables.

Lors de l’étude du système d’Euler et de sa résolution, différentes formulations peuvent être utiles.

### 1.1.6 Quelques formulations utiles

#### 1.1.6.1 Formulation intégrale

Les équations d’Euler peuvent aussi être écrites sous forme intégrale :

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_A (\vec{n} \cdot \rho \vec{V}) dA = 0$$

$$\int_V \frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} dV + \int_A \rho \vec{V} (\vec{n} \cdot \vec{V}) dA + \int_A P \vec{n} dA = 0$$

$$\int_V \frac{\partial \rho E}{\partial t} dV + \int_A \rho E (\vec{n} \cdot \vec{V}) dA + \int_A P (V \cdot \vec{n}) dA = 0$$

Cette formulation est particulièrement adaptée à la résolution par une méthode de type volumes finis. Nous verrons en détail par la suite les bases essentielles de ce type de méthode.

### 1.1.6.2 Formulation conservative

L'étude des équations d'Euler peut être réalisée en majeure partie en une dimension d'espace.

Dans ce cas, la formulation différentielle présentée au paragraphe précédent s'écrit:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2 + P}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial u(\rho E + P)}{\partial x} = 0$$

où "u" désigne la composante unidimensionnelle du vecteur vitesse  $\vec{V}$ .

On peut écrire ce système sous la forme abrégée :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

avec  $U = (\rho, \rho u, \rho E)^T$  et  $F = (\rho u, \rho u^2 + P, u(\rho E + P))^T$ .

Cette formulation est appelée *formulation conservative* car elle dérive directement des principes de conservation. C'est la formulation la plus utilisée car elle permet le calcul des discontinuités dans un écoulement (chocs, surfaces de contact). En effet, les relations de saut aux discontinuités sont implicitement contenues dans le vecteur flux  $F$ .

### 1.1.6.3 Formulation primitive

Une autre formulation assez utilisée, mais inapte au calcul des chocs est la *formulation primitive* appelée aussi *formulation en variable physiques*.

Le système d'Euler ( $\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$ ) peut être écrit sous la forme :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + A(W) \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \text{ avec } W = (\rho, u, P)^T$$

Le vecteur  $W$  représente le vecteur des variables primitives. Cette écriture est obtenue en combinant entre elles les équations.

L'équation de conservation de la masse,  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0$  peut aussi être écrite :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement  $\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2 + P}{\partial x} = 0$ , peut être écrite :

$$u \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} \right) + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

Comme  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0$  et que la densité est toujours positive ( $\rho > 0$ ) on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

L'équation de conservation d'énergie s'écrit :  $\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial u(\rho E + P)}{\partial x} = 0$ .

En développant on a :

$$E \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} \right) + \rho \left( \frac{\partial E}{\partial t} + u \frac{\partial E}{\partial x} \right) + P \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

Le premier terme de cette équation disparaît à l'aide de l'équation de conservation de la masse.

On remplace ensuite l'énergie totale par l'énergie interne et l'énergie cinétique :  $E = e + 1/2 u^2$ .

On obtient :

$$\rho \left( \frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial x} \right) + \rho u \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + P \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

Le deuxième terme entre parenthèses est modifié à l'aide de la formulation primitive de l'équation du mouvement :

$$\rho \left( \frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial x} \right) + \rho u \left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + P \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

On obtient ainsi l'équation d'évolution de l'énergie interne :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{P}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

L'énergie interne est une fonction de la pression et de la densité. En effet la loi d'état du fluide s'écrit :  $P = P(\rho, e)$ , que l'on peut écrire aussi  $e = e(P, \rho)$ .

On peut alors écrire :  $de = \left( \frac{\partial e}{\partial P} \right)_\rho dP + \left( \frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_P d\rho$  et donc:

$$\left( \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial e}{\partial P} \right)_\rho \frac{\partial P}{\partial t} + \left( \frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_P \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{et} \quad \left( \frac{\partial e}{\partial x} = \frac{\partial e}{\partial P} \right)_\rho \frac{\partial P}{\partial x} + \left( \frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_P \frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

En injectant ces résultats dans l'équation d'énergie interne on obtient :

$$\left( \frac{\partial e}{\partial P} \right)_\rho \left( \frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_P \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{P}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

En utilisant la forme primitive de l'équation de masse, le deuxième terme entre parenthèses se simplifie, et on obtient :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} + \left[ \frac{P}{\rho} - \rho \left( \frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_P \right] \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

On note vitesse du son au carré le terme  $c^2 = \frac{\left[ \frac{P}{\rho^2} - \frac{\partial e}{\partial \rho} \right]_P}{\left( \frac{\partial e}{\partial P} \right)_\rho}$ .

Ainsi, la forme primitive de l'équation de conservation de l'énergie est :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Avant d'aller plus loin, montrons que la formule que nous venons d'obtenir pour la vitesse du son est identique à sa définition classique. Par définition  $c^2 = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S$  où  $S$  désigne l'entropie.

Le premier principe de la thermodynamique s'écrit :

$$de = \delta Q + dW$$

où  $de$  représente la variation d'énergie interne,  $\delta Q$  l'échange de chaleur avec l'extérieur,  $dW$  le travail échangé.

Le travail échangé s'écrit:  $dW = -PdV$  où  $dV$  représente la variation de volume ou de volume spécifique. Le volume spécifique est l'inverse de la densité:  $V = 1 / \rho$ . Donc  $dV = -1 / \rho^2 d\rho$ .

Par ailleurs, l'échange de chaleur s'écrit:  $\delta Q = TdS$  où  $T$  est la température.

Le premier principe de la thermodynamique s'écrit alors:

$$TdS = de - P / \rho^2 d\rho$$

Nous cherchons à exprimer la variation de pression liée à une variation de densité lorsque l'entropie reste constante. En écrivant que l'entropie n'a aucune variation, le premier principe se résume à:

$$de = P / \rho^2 d\rho$$

Or, nous avons déjà vu que  $de = \left( \frac{\partial e}{\partial P} \right)_\rho dP + \left( \frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_P d\rho$ .

Ainsi,  $\left( \frac{\partial e}{\partial P} \right)_\rho dP + \left( \frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_P d\rho = P / \rho^2 d\rho$ . Ceci permet d'écrire  $\frac{dP}{d\rho} = \frac{\left[ \frac{P}{\rho^2} - \left( \frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_P \right]}{\left( \frac{\partial e}{\partial P} \right)_\rho}$ .

Or  $\frac{dP}{d\rho} = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s$  puisque l'entropie a été supposée constante. Et donc,  $c^2 = \frac{\left[ \frac{P}{\rho^2} - \left( \frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_P \right]}{\left( \frac{\partial e}{\partial P} \right)_\rho}$ .

Il apparaît donc nécessaire de disposer d'une loi d'état afin de calculer  $P$  et  $c^2$ . La vitesse des ondes acoustiques " $c$ " sera aussi nécessaire lors de la résolution numérique des équations.

Le système d'Euler peut donc être écrit sous la forme:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + A(W) \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \text{ avec } W = (\rho, u, P)^T$$

$$\text{et } A(W) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \rho c^2 & u \end{pmatrix}$$

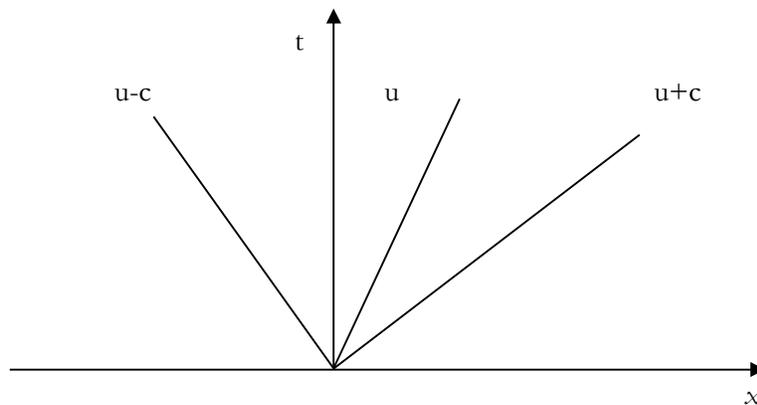
Il est aisé de calculer les valeurs propres de la matrice  $A$ . Ces valeurs propres nous donnent les vitesses des ondes suivant lesquelles les variations de pression, densité, vitesse et énergie interne se propagent. Les vitesses propres sont aussi appelées directions caractéristiques. Les valeurs propres ou vitesses d'ondes sont au nombre de trois. Le calcul du déterminant:  $|A - \lambda I| = 0$  :

$$\begin{vmatrix} u - \lambda & \rho & 0 \\ 0 & u - \lambda & 1/\rho \\ 0 & \rho c^2 & u - \lambda \end{vmatrix} = (u - \lambda)[(u - \lambda)^2 - c^2] = 0$$

donne les valeurs propres  $\lambda^+ = u + c$ ,  $\lambda^- = u - c$  et  $\lambda^0 = u$ .

Il est clair que ces trois valeurs propres sont réelles et distinctes. Dans ce cas, le système d'EDP du premier ordre est défini *strictement hyperbolique*.

D'un point de vue physique, cela signifie qu'en absence d'onde de choc ou de discontinuité, tout point "x" d'un écoulement émet à chaque instant 3 ondes :



Les ondes se propageant aux vitesses  $u-c$  et  $u+c$  véhiculent les variations de pression et de vitesse et donc aussi de densité (ondes de détente et de compression) tandis que l'onde se propageant à la vitesse  $u$  véhicule essentiellement les informations liées à la densité. Ces ondes sont émises en tout point à chaque instant. Lorsque le milieu n'est soumis à aucun gradient, l'amplitude de ces ondes est nulle, et elles ne véhiculent donc aucune variation.

*Remarque:*

L'étude des équations d'Euler peut aussi être réalisée à partir de la formulation conservative

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0. \text{ On construit alors une autre matrice Jacobienne en écrivant que } \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x}.$$

$$\text{Le système correspondant s'écrit : } \frac{\partial U}{\partial t} + A(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \text{ avec } A(U) = \frac{\partial F}{\partial U}.$$

Si on note  $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$  et  $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ ,  $A(U)$  est obtenue par :  $A(U) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \frac{\partial f_1}{\partial u_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \frac{\partial f_2}{\partial u_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u_1} & \frac{\partial f_3}{\partial u_2} & \frac{\partial f_3}{\partial u_3} \end{pmatrix}$ .

Les valeurs propres de cette nouvelle matrice sont exactement les mêmes que celles que nous avons obtenues avec la formulation en variables primitives.

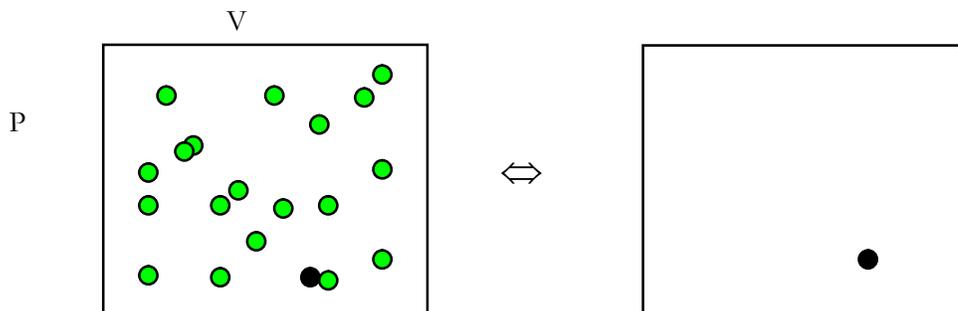
Nous avons vu précédemment l'absolue nécessité de disposer d'une loi d'état pour déterminer la pression et la vitesse du son. Les lois d'état sont en fait des lois de comportement de la matière liant les variables thermodynamiques du milieu entre elles.

## 1.2 Lois d'état

La loi d'état du fluide ou du milieu considéré permet d'une part de clore le système d'équations, tout en étant caractéristique du comportement du fluide. Ces lois sont de la forme  $P = P(\rho, e)$  ou  $P = P(\rho, T)$ . Il existe un nombre considérable d'équations d'état, surtout dès que l'on s'intéresse à des fluides denses ou hétérogènes (des mélanges par exemple). On ne va présenter ici que les lois d'état les plus usuelles et les plus pratiques.

### 1.2.1 Loi d'état des gaz parfaits

Cette loi d'état s'applique aux gaz peu denses (typiquement pour des valeurs de la densité inférieures à  $50 \text{ kg/m}^3$ ). En effet chaque molécule est supposée évoluer librement sans interaction avec les autres. Il n'y a donc aucun potentiel de répulsion dans cette équation d'état.



La pression est alors donnée par la loi d'état calorique :  $P V = n \hat{R} T$

où  $P$  représente la pression,  $V$  le volume,  $n$  le nombre de moles de gaz que contient le volume,  $\hat{R}$  la constante molaire des gaz et  $T$  la température. En introduisant la masse molaire, cette équation peut être re-écrite :

$$P = (n\hat{M} / V)(\hat{R} / \hat{M})T = \rho RT$$

$\rho$  représente alors la densité et  $R$  la constant massique du gaz :  $R = \hat{R} / \hat{M}$ .

Pour la vapeur d'eau par exemple, la masse molaire vaut  $\hat{M}_{H_2O} = 2 + 16 = 18 \text{ g/mol}$   
 $= 18.10^{-3} \text{ kg/mol}$ . Ainsi, la constante de ce gaz vaut :  $R = \frac{8.314 \text{ J/mol/K}}{18.10^{-3} \text{ kg/mol}} = 461 \text{ J/kg/K}$ .

On a pour habitude de travailler dans le système d'unité international constitué de Mètres, Kilogrammes et de Secondes (MKS), et donc la forme de l'équation d'état utilisée s'écrit  $P = \rho RT$  avec  $R$  en J/kg/K.

La température est déterminée par la loi d'état thermique :  $e = C_v T$  où  $C_v$  représente la capacité calorifique à volume constant du gaz (J/kg/K). Pour un gaz parfait  $C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$  où  $\gamma$  représente

l'exposant adiabatique défini par :  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ . Typiquement, pour un gaz  $1.05 < \gamma < 2$  ( $\gamma_{air} = 1.4$ ).

L'équation d'état calorique peut être combinée à l'équation d'état barotrope pour donner une forme indépendante de la température :  $P = (\gamma - 1)\rho e$ .

Cette dernière forme est la plus pratique, car elle permet l'expression de la pression directement à partir des variables calculées par la formulation conservative ( $\rho$  et  $e$ ).

### 1.2.2 Equation d'état de Noble - Abel ou équation d'état du covolume

Dans cette équation d'état, une première approximation du volume occupé par les autres molécules est considérée. Elle s'écrit :

$$P \left( \frac{1 - b\rho}{\rho} \right) = RT \quad \text{ou} \quad P(V - b) = RT$$

Elle signifie que le volume spécifique  $V=1/\rho$  ( $\text{m}^3/\text{kg}$ ) ne peut pas être réduit en dessous de la valeur critique  $b$ . Ce volume  $b$  est appelé covolume et correspond au volume occupé par les molécules.

Si l'équation d'état calorique est inchangée par rapport au gaz parfait, on a alors :  $P = \frac{(\gamma - 1)\rho e}{1 - b\rho}$

La théorie cinétique des gaz permet une estimation du covolume. La plupart du temps il est mesuré pour le gaz considéré. Typiquement  $0.910^{-3} < b < 1.110^{-3} \text{ m}^3/\text{kg}$ . Cette équation d'état est souvent utilisée en combustion pour des gaz issus de la décomposition de combustibles solides (dans les moteurs fusée par exemple), lorsque les pressions sont élevées (et par voie de conséquence la densité aussi).

*Remarque.* La littérature fournit un nombre impressionnant d'équations d'état, mais pour spécifier un état thermodynamique complètement, il est nécessaire de disposer de deux lois d'état : barotrope et calorique. On trouve assez facilement la loi d'état calorique pour le problème qui est à résoudre, mais la loi d'état thermique n'est pratiquement jamais fournie.

Bien souvent, on est amené à construire soi même cette loi d'état, ou du moins à vérifier que la loi d'état calorique que l'on va choisir est bien compatible avec la loi d'état barotrope. En effet, ces deux lois d'état sont liées par la relation de compatibilité suivante.

Notons  $F = F(V, T)$  l'énergie libre. L'identité suivante est forcément vérifiée :  $\frac{\partial^2 F}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 F}{\partial V \partial T}$ ,

c'est à dire :

$$\frac{\partial}{\partial T} \left( \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_T \right)_V = \frac{\partial}{\partial V} \left( \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_V \right)_T$$

Comme  $P = -\left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_T$ ,  $S = -\left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_V$  et  $e = F - T \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_V$ , on obtient l'identité suivante :

$$\left( \frac{\partial e}{\partial V} \right)_T = -P + T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$$

qui est la relation de compatibilité qui lie les deux équations d'état.

*Exemple.* Dans le cas de l'équation d'état de Noble-Abel on a :

$$\left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = R/(V - b) \text{ ce qui implique d'après la relation de compatibilité que } \left( \frac{\partial e}{\partial V} \right)_T = 0.$$

Ainsi, comme  $de = \left( \frac{\partial e}{\partial V} \right)_T dV + \left( \frac{\partial e}{\partial T} \right)_V dT$ , on a ici  $de = \left( \frac{\partial e}{\partial T} \right)_V dT$ , et comme  $\left( \frac{\partial e}{\partial T} \right)_V = Cv$

on a bien pour équation d'état thermique  $e = CvT$  (sous l'hypothèse que  $Cv$  est une constante).

Pour d'autres lois d'état caloriques, la loi d'état thermique peut être bien plus compliquée.

### 1.2.3 Equation d'état de Van der Waals

Cette équation d'état tient aussi compte du volume occupé par les molécules mais aussi des forces d'interaction entre elles. Elle est utile lorsque des changements de phase sont présents (liquide  $\rightarrow$  vapeur ou inversement), donc dans certains problèmes d'évaporation, condensation, ébullition, cavitation. Elle s'écrit :

$$P = \frac{RT}{V - b} - \frac{c}{V^2} \quad \text{ou} \quad \left(P + \frac{c}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

### 1.2.4 Equation d'état du « Gaz Raide » ou « Stiffened Gas »

Aux hautes pressions, les liquides et les solides deviennent compressibles. Une équation d'état pratique et précise pour décrire le comportement de ces corps est l'équation d'état du gaz raide (Stiffened Gas). Par analogie avec l'équation d'état des gaz parfaits, on l'écrit :

$$P = (\gamma - 1)\rho e - \gamma P_\infty$$

où  $\gamma$  et  $P_\infty$  sont des constantes. Ici,  $\gamma$  n'est absolument plus égal à  $C_p/C_v$ . La correction en pression  $P_\infty$  traduit la résistance du milieu à la compression (sa raideur), tandis que  $\gamma$  est caractéristique de sa compressibilité. Ainsi, pour l'eau liquide, qui est un fluide relativement incompressible  $\gamma = 4.4$  et  $P_\infty = 6.10^8 Pa$ . Pour le cuivre,  $\gamma = 4$  et  $P_\infty = 341.10^8 Pa$ , pour le granite  $\gamma = 2.6$  et  $P_\infty = 142.10^8 Pa$  et pour l'air  $\gamma = 1.4$  et  $P_\infty = 0 Pa$  (puisque la formulation de l'équation d'état Stiffened Gas contient celle des gaz parfaits).

### 1.2.5 Equation d'état de Mie Gruneisen

Cette équation d'état est une généralisation de toutes les équations d'état précédentes. Elle n'est cependant vraiment utilisée que pour les solides, liquides et gaz aux très hautes pressions. Elle s'écrit :

$$P = (\gamma(\rho) - 1)\rho e - \gamma(\rho)P_\infty(\rho)$$

La difficulté avec cette équation d'état réside dans la détermination des fonctions  $\gamma(\rho)$  et  $P_\infty(\rho)$ .

## 1.3 Sous modèles des équations d'Euler

Les sous modèles sont souvent utiles pour étudier les propriétés mathématiques des équations à résoudre car elles contiennent les mêmes types d'informations physiques et mathématiques que les modèles plus sophistiqués comme les équations d'Euler ou les modèles multiphasiques que nous verrons par la suite. Ces sous modèles permettent en particulier de réduire la complexité des

systèmes à étudier et d'en faciliter l'étude analytique. Les équations d'Euler isentropiques sont un bon exemple de système simplifié.

### 1.3.1 Equations d'Euler isentropiques

On suppose que l'entropie  $s$  est constante partout, ce qui est une simplification des processus intervenant dans l'écoulement. Nous avons vu que l'équation de conservation de l'énergie provenait du premier principe de la thermodynamique :  $de = Tds - PdV$ . Pour une transformation isentropique, on a seulement :  $de = -PdV$ . L'énergie interne est une fonction de la pression et de la densité ou du volume spécifique :  $e = e(P, V)$ . Sa différentielle s'écrit donc :

$$de = \left( \frac{\partial e}{\partial P} \right)_V dP + \left( \frac{\partial e}{\partial V} \right)_P dV = -PdV. \text{ Si on suppose le fluide régit par l'équation d'état des gaz}$$

parfaits ( $P = (\gamma - 1)\rho e = (\gamma - 1)e / V$  ou  $e = PV / (\gamma - 1)$ ), on a :  $\left( \frac{\partial e}{\partial P} \right)_V = \frac{V}{\gamma - 1}$  et

$\left( \frac{\partial e}{\partial V} \right)_P = \frac{P}{\gamma - 1}$ . Le premier principe de la thermodynamique se ramène alors à :

$$\frac{V}{\gamma - 1} dP + \frac{P}{\gamma - 1} dV = -PdV \text{ ou encore à : } \frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0. \text{ En intégrant on obtient :}$$

$PV^\gamma = K$  ou encore  $P / \rho^\gamma = K$  où  $K$  est une constante pour tout l'écoulement. Ainsi, pour le calcul de la pression cette relation est suffisante : l'équation d'énergie n'est plus nécessaire, ni l'équation d'état. Ces deux relations sont implicitement contenues dans la relation :  $P / \rho^\gamma = K$ .

Il suffit alors d'étudier le système réduit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + P)}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

fermé par :  $P / \rho^\gamma = K$ . La vitesse du son au carré est obtenue par :  $c^2 = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s = \gamma K \rho^{\gamma-1}$ .

Nous allons maintenant vérifier l'hyperbolicité de ce système. On note  $m = \rho u$  et on re-écrit alors le système :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial (m^2 / \rho + K \rho^\gamma)}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

Il est aisé d'écrire ce système sous la forme :  $\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$  avec  $U = (\rho, m)^T$ . On peut l'écrire

aussi :  $\frac{\partial U}{\partial t} + A(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0$  avec  $A(U) = \frac{\partial F}{\partial U}$ . La matrice  $A$  est facilement calculable :

$$A(U) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{m^2}{\rho^2} + c^2 & \frac{2m}{\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - u^2 & 2u \end{pmatrix}. \text{ Les valeurs propres de } A(U) \text{ sont}$$

obtenues par  $\det(A(U) - \lambda I) = 0$ , qui admet deux racines :  $\lambda_1 = u - c$  et  $\lambda_2 = u + c$ . Ce système est donc de nouveau parfaitement hyperbolique.

### 1.3.2 Equations d'Euler isothermes

Un autre système, encore plus simple que le précédent peut être obtenu en supposant le milieu à température constante. Si le milieu est isotherme, l'équation d'énergie n'est pas nécessaire, et l'équation d'état des gaz parfaits  $P = \rho RT$  se ramène à :  $P = K\rho$ .

Le système à considérer est donc :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + P)}{\partial x} = 0$$

fermé par :  $P = K\rho$

Il est aisé de montrer que ce système est aussi hyperbolique.

### 1.3.3 Ecoulements compressibles dans des conduites à variations de section

Les écoulements compressibles dans les conduites à section variables se rencontrent très souvent dans les tubes à chocs, les tuyères, les conduites industrielles. Il est possible de résoudre ces problèmes d'écoulement à l'aide des équations d'Euler bidimensionnelles. Nous verrons comment procéder dans le chapitre suivant. Mais ceci est relativement coûteux en temps machine. Une façon économique de procéder est d'utiliser un modèle d'écoulement moyen unidimensionnel. Bien sûr, les grandeurs de l'écoulement ne seront que des grandeurs moyennes dans la section, mais en général suffisamment proches de la réalité lorsque les variations de section sont douces et assez faibles.

Partant des équations bidimensionnelles, après application d'une opération de moyenne sur la section on obtient :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = S(U)$$

$$\text{avec } U = (\rho, \rho u, \rho E)^T, \quad F = (\rho u, \rho u^2 + P, u(\rho E + P))^T \quad \text{et} \quad S(U) = -\frac{1}{A} \begin{pmatrix} \rho u \frac{\partial A}{\partial x} - \rho \frac{\partial A}{\partial t} \\ \rho u^2 \frac{\partial A}{\partial x} \\ u(\rho E + P) \frac{\partial A}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

$A$  représente la section droite de la conduite qui peut être dans le cas général une fonction de l'espace et du temps  $A = A(x, t)$ .

Le cas le plus courant est celui où la section ne dépend que de  $x$  (conduite indéformable). Dans ce cas, une forme utile des équations est :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = S(U)$$

$$\text{avec } U = (A\rho, A\rho u, A\rho E)^T, \quad F = (A\rho u, A(\rho u^2 + P), Au(\rho E + P))^T \quad \text{et} \quad S(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ P \frac{\partial A}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cette formulation est pratique, car en notant  $\bar{\rho} = A\rho$  et  $\bar{P} = AP$ , le système précédent correspond alors exactement aux équations d'Euler unidimensionnelles, à un terme source près.

#### 1.3.4 Autres modèles

Il existe des modèles d'écoulement proches des équations d'Euler.

Le plus utilisé est celui des écoulements de liquide dans des milieux peu profonds (équations de Saint Venant ou Shallow Water Equations). Ces équations régissent la dynamique des écoulements dans les rivières, barrages, dans les zones portuaires, sur la cote, et décrivent parfaitement la dynamique des ondes de surface (les vagues), ainsi que la vitesse de l'écoulement. Le détail de ces équations peut être trouvé dans Toro (1997). Ces équations sont plus simples que les équations d'Euler, mais leur résolution présente certaines spécificités. Les idées essentielles peuvent être déduites des informations données dans le chapitre suivant pour les équations d'Euler.

Les équations régissant les 'écoulements' de voitures sur les routes, les mouvements de personnes dans les rues (traffic flow equations) s'apparentent aussi aux équations d'Euler.

D'autres modèles sont plus complexes que les équations d'Euler, et présentent plus de difficulté pour la résolution. C'est le cas des écoulements réactifs, sièges de réactions chimiques, et surtout les écoulements diphasiques qui présentent de nombreuses difficultés.

# Chapitre 2

## Résolution des équations d'Euler par les méthodes aux volumes finis basées sur le schéma de Godunov

Le modèle que nous allons étudier tout particulièrement est constitué par les équations d'Euler. Ce sont en effet les équations les plus utilisées en mécanique des fluides compressibles et en aérodynamique. Les mathématiques dont on dispose aujourd'hui permettent une assez bonne appréhension de ce type de système, tandis qu'il reste pas mal d'incertitudes pour des systèmes plus complexes comme ceux que l'on rencontre dans les écoulements réactifs et surtout multiphasiques. Le lecteur intéressé pourra se reporter au cours de DEA pour avoir des informations sur la résolution de ces types de modèles.

Les équations d'Euler forment un système hyperbolique non linéaire qui admet des solutions discontinues : les ondes de choc et les discontinuités de contact. La résolution de ce type de modèle présente des difficultés particulières liées à la présence de ces discontinuités.

Il s'agit d'un domaine de recherche en pleine expansion, mais actuellement on peut réaliser une résolution acceptable de ces équations en suivant les idées directrices proposées par Godunov (1959) et les extensions de sa méthode qui ont suivi.

A l'âge de 25 ans, Godunov a proposé un schéma numérique qui est aujourd'hui à la base de toutes les méthodes numériques utilisées en aérodynamique, dynamique des gaz, et plus généralement pour la résolution des systèmes hyperboliques.

Depuis les années 1980, ce schéma a supplanté toutes les autres méthodes. Les extensions à l'ordre 2 de ce schéma selon van Leer (1979), en font un outil très efficace.

Godunov a eu 70 ans en 1999, et a consacré le reste de sa carrière à la refonte de l'algèbre linéaire et à l'unification de toute la physique (hors relativité). L'unification de la mécanique des fluides,

des solides, du rayonnement, de l'électromagnétisme etc. a été réalisé en proposant une formulation étendue de la thermodynamique.

## 2.1 Introduction . Le schéma de Godunov (1959)

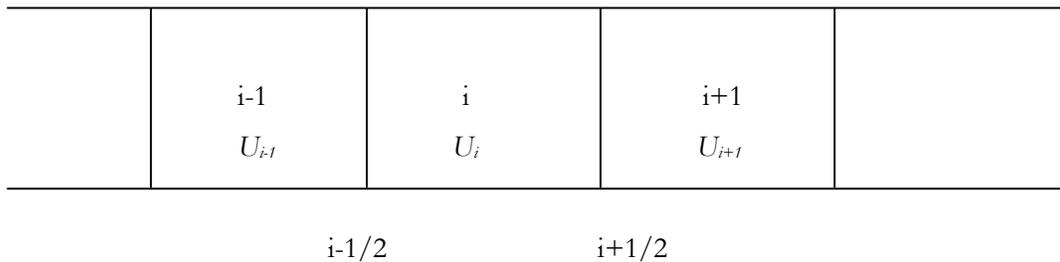
Nous allons décrire très succinctement dans un premier temps la méthode de Godunov, afin d'expliquer l'étude mathématique des équations d'Euler qui va suivre, et la recherche de la solution du **Problème de Riemann**.

Le schéma de Godunov est extrêmement simple dans son principe. Il est de plus très facile à programmer. Il ne fait intervenir aucune résolution matricielle : il s'agit d'un schéma **explicite**.

La seule difficulté réside dans le calcul des flux, qui sont solution du problème de Riemann.

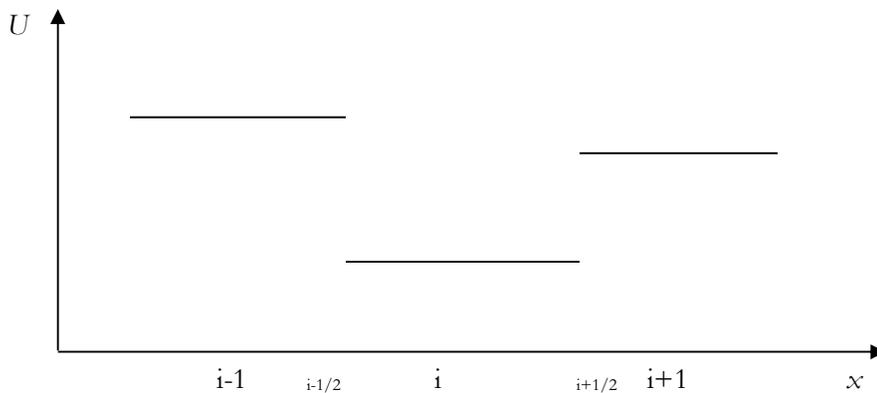
Nous allons l'illustrer sur un simple exemple unidimensionnel.

Considérons un conduit rectiligne décomposé en cellules :



Les inconnues sont positionnées au centre de chaque cellule. Les cellules communiquent aux autres par les interfaces  $i-1/2$ ,  $i+1/2$  etc.

Les inconnues  $U_i$  sont constantes par mailles. En fait, seule la moyenne de l'inconnue sera déterminée sur la maille. La solution, dans le conduit, peut être représentée à un instant donné par :



et à l'instant  $t_n$  dans la maille  $i$ , la solution est donnée par :  $U_i^n = \frac{1}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \tilde{U}(x, t_n) dx$ .

Les équations à résoudre pour faire évoluer la solution dans l'espace et dans le temps sont :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left( \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx dt = 0$$

c'est à dire :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (\tilde{U}(x, t_{n+1}) - \tilde{U}(x, t_n)) dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (F_{i+1/2} - F_{i-1/2}) dt = 0$$

Les flux sont supposés constants durant le pas de temps de  $t_n$  à  $t_{n+1}$ , tant que le pas de temps vérifie la condition de stabilité (nous la verrons plus loin).

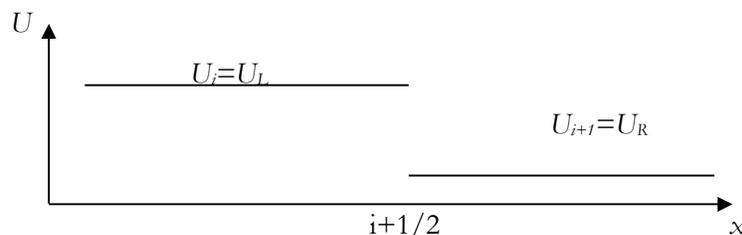
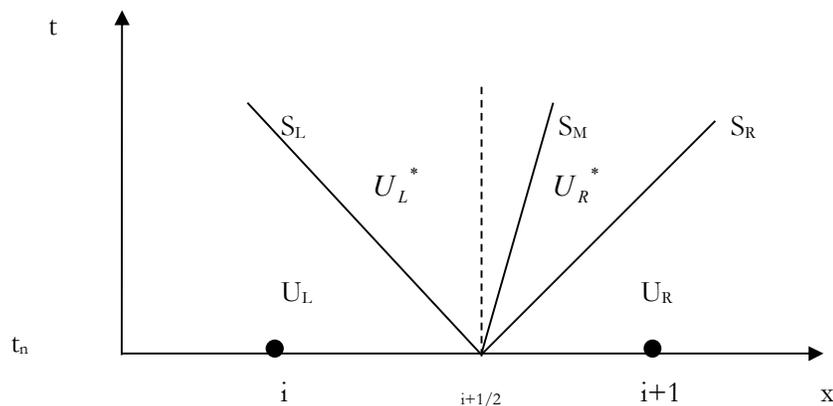
En notant :  $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$  et  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$  on obtient :  $U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2} - F_{i-1/2})$

Cette méthode, très simple, reporte toute la difficulté dans le calcul des flux  $F_{i+1/2}$  et  $F_{i-1/2}$ .

En effet, comme la solution peut être discontinue, doit on prendre:

$$F_{i+1/2} = F_i, \text{ ou } F_{i+1/2} = F_{i+1} \text{ ou } F_{i+1/2} = 0.5(F_i + F_{i+1}).$$

En fait, aucune pondération naïve ne peut fonctionner correctement. La raison est qu'en chaque point, et en particulier sur chaque interface de cellule, des ondes sont émises, et la propagation de ces ondes vient modifier les états de droite et de gauche.



Sur un bord de maille, partant de deux états discontinus, trois ondes sont émises et modifient les états thermodynamiques et cinématiques des fluides de droite et de gauche.

Calculer le flux  $F_{i+1/2}$  revient à calculer le flux  $F(U_L^*)$  (sur la figure précédente). La connaissance de l'état  $U_L^*$  est donc nécessaire. Mais cette détermination passe par le calcul des modifications des variables de l'écoulement par passage des ondes, et la *dynamique des 3 ondes est couplée* de façon non-linéaire.

Si on se souvient du problème du tube à choc, vu en cours sur les écoulements compressibles, il s'agit en fait de résoudre un problème semblable (en fait ce problème **est** le problème de Riemann en dynamique des gaz), sur chaque bord de maille.

Pour parvenir à une résolution efficace de ce problème de tube à choc, il faut au préalable effectuer une analyse de certaines propriétés des équations d'Euler.

## 2.2 Equations d'Euler unidimensionnelles

Nous avons vu précédemment que le système d'Euler était obtenu à partir des principes de conservation et s'écrivait :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0 \quad \text{avec} \quad U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ u(\rho E + P) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad E = e + 1/2 u^2 \quad \text{et la pression } P \text{ est}$$

donnée par une loi d'état  $P = P(\rho, e)$ .

Pour des raisons de simplicité dans la suite de l'exposé, nous introduisons ici une loi d'état simple, qui est aussi la plus utilisée (loi d'état des gaz parfaits) :  $P = (\gamma - 1)\rho e$  ou  $\gamma$  est généralement une constante caractéristique du gaz ( $\gamma$  est en fait le rapport des chaleurs spécifiques à pression et volume constants, tant que l'approximation gaz parfait est valide  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ ).

La vitesse du son est donnée par  $c = \sqrt{\gamma P / \rho}$ .

Ce système de lois de conservation peut être écrit sous la forme quasi linéaire :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$$\text{avec } A(U) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2(\gamma-3)u^2 & (3-\gamma)u & \gamma-1 \\ 1/2(\gamma-2)u^3 - \frac{c^2u}{\gamma-1} & \frac{3-2\gamma}{2}u^2 + \frac{c^2}{\gamma-1} & \rho u \end{pmatrix}$$

*Remarque.* Les équations d'Euler accompagnées de l'équation d'état des gaz parfaits satisfont la propriété d'homogénéité :  $F(U) = A(U)U$ , qui est à la base de certaines méthodes numériques de découpage de flux (Flux Vector Splitting) et aussi de schémas implicites.

La démonstration de cette propriété est évidente : il suffit de multiplier la matrice Jacobienne par le vecteur  $U$ .

Il est par ailleurs important de connaître les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice  $A$ . Les valeurs propres correspondent aux vitesses auxquelles les ondes élémentaires se propagent : onde de compression, de détente et discontinuités de contact. *Les ondes de choc ne se propagent pas à ces vitesses car la formulation quasi-linéaire exclut de telles ondes. Les ondes de choc sont réellement non linéaires et ne sont contenues que dans la formulation conservative.*

*Vitesses de ondes élémentaires*

Ce sont les valeurs propres de la matrice  $A$  :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1/2(\gamma-3)u^2 & (3-\gamma)u - \lambda & \gamma-1 \\ 1/2(\gamma-2)u^3 - \frac{c^2u}{\gamma-1} & \frac{3-2\gamma}{2}u^2 + \frac{c^2}{\gamma-1} & \rho u - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u \quad \text{et} \quad \lambda_3 = u + c.$$

Les **amplitudes** des informations véhiculées par les ondes sont liées aux vecteurs propres de droite :  $AK = \lambda K$ .

$$\text{On pose } K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \text{ et on obtient pour } \lambda_1 = u - c :$$

$$k_2 = (u - c)k_1$$

$$1/2(\gamma-3)u^2k_1 + (3-\gamma)uk_2 + (\gamma-1)k_3 = (u-c)k_2$$

$$\left[ 1/2(\gamma-2)u^3 - \frac{c^2u}{\gamma-1} \right] k_1 + \left[ (3-2\gamma)u^2/2 + \frac{c^2}{\gamma-1} \right] k_2 + \rho k_3 = (u-c)k_3$$

Ainsi,  $K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ u - c \\ H - uc \end{pmatrix}$ . On obtient de la même façon  $K_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ 1/2u^2 \end{pmatrix}$  et  $K_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ u + c \\ H + uc \end{pmatrix}$  avec

$H = E + P/\rho$  (enthalpie totale).

*Exercice. Equations de la dynamique des gaz linéarisées.*

Soit le système :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c^2 / \rho_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

ou  $c^2$  et  $\rho_0$  sont des constantes positives.

Calculer la matrice jacobienne du système, ses valeurs propres et vecteurs propres.

*Solution*

Ce système s'écrit aussi :  $\frac{\partial U}{\partial t} + A(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0$  avec  $U = \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix}$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & \rho_0 \\ c^2 / \rho_0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Les valeurs propres sont :  $\begin{vmatrix} -\lambda & \rho_0 \\ c^2 / \rho_0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -c$  et  $\lambda_2 = c$ .

Les vecteurs propres de droite sont obtenus par :  $AK = \lambda K$ , c'est à dire,

$\begin{pmatrix} 0 & \rho_0 \\ c^2 / \rho_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ck_1 \\ -ck_2 \end{pmatrix}$ . On obtient alors :  $\rho_0 k_2 = -ck_1$  et  $c^2 / \rho_0 k_1 = -ck_2$ , c'est à dire

deux équations équivalentes, ou une seule équation à deux inconnues.

Ceci donne une famille de solutions. On choisit alors un paramètre  $\alpha_1$  non nul et on pose

$k_1 = \alpha_1$ . On en déduit  $k_2 = -\alpha_1 c / \rho_0$ , ce qui fixe le premier vecteur propre :  $K_1 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -c / \rho_0 \end{pmatrix}$ .

De la même façon, on trouve le deuxième vecteur propre :  $K_2 = \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ c / \rho_0 \end{pmatrix}$ . On peut aussi

choisir  $\alpha_1 = \alpha_2 = \rho_0$ , ce qui donne  $K_1 = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ -c \end{pmatrix}$  et  $K_2 = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ c \end{pmatrix}$ .

### Formulation en variables primitives des équations d'Euler

Nous avons vu dans le premier chapitre que les équations d'Euler pouvaient aussi s'écrire sous la forme quasi-linéaire suivante. Cette formulation est utile pour certains calculs.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\text{soit : } \frac{\partial W}{\partial t} + A(W) \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \text{ avec } W = (\rho, u, P)^T \text{ et } A(W) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \rho c^2 & u \end{pmatrix}.$$

Cette matrice admet bien sur les mêmes valeurs propres que précédemment, mais les vecteurs propres sont différents :

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -c/\rho \\ c^2 \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } K_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ c/\rho \\ c^2 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres de gauche sont aussi importants. Ils sont obtenus par la résolution du système  $LA = \lambda L$  :  $L_1 = (0, \alpha_1, -\alpha_1/\rho c)$ ,  $L_2 = (\alpha_2, 0, -\alpha_2/c^2)$  et  $L_3 = (0, \alpha_3, \alpha_3/\rho c)$ .

$\alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$  sont des paramètres non nuls.

*Exercice.* Vérifions qu'en choisissant des paramètres  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$  appropriés, les vecteurs propres

de droite et de gauche sont bi-orthonormaux, c'est à dire :  $L_j \cdot K_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

$$L_1 \cdot K_1 = (0, \alpha_1, -\alpha_1/\rho c) \begin{pmatrix} 1 \\ -c/\rho \\ c^2 \end{pmatrix} = -2\alpha_1 c/\rho. \text{ En choisissant } \alpha_1 = -\rho/2c, \text{ } L_1 \cdot K_1 = 1 \text{ puis}$$

$$L_1 \cdot K_2 = 0 \text{ et } L_1 \cdot K_3 = 0.$$

### Equations caractéristiques.

Les équations caractéristiques sont très importantes pour la compréhension des phénomènes physiques et l'élaboration de méthodes numériques. A l'aide des vecteurs propres de gauche, on peut transformer le système d'EDP en équations caractéristiques. Ce sont en fait des **équations**

**différentielles ordinaires** valides seulement le long de directions privilégiées, c'est à dire suivant les trajectoires des ondes définies par les valeur propres de la matrice.

Partant de la formulation en variables primitive (on pourrait partir d'une autre formulation), on multiplie le système par un vecteur propre de gauche :

$$L_i \cdot \left( \frac{\partial W}{\partial t} + A(W) \frac{\partial W}{\partial x} \right) = 0$$

c'est à dire  $L_i \cdot \frac{\partial W}{\partial t} + L_i \cdot A(W) \frac{\partial W}{\partial x} = 0$ ,

ou encore  $L_i \cdot \frac{\partial W}{\partial t} + \lambda_i L_i \frac{\partial W}{\partial x} = 0$ ,

et enfin  $L_i \cdot \left( \frac{\partial W}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial W}{\partial x} \right) = 0$ .

On peut noter ce résultat important sous la forme :  $L_i \cdot d_{\lambda_i} W = 0$  ou  $d_{\lambda_i} W = \frac{\partial W}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial W}{\partial x}$ .

Autrement dit :  $L_i \cdot \begin{bmatrix} d\rho \\ du \\ dP \end{bmatrix}_{\lambda_i} = 0$ .

En développant suivant chacune des directions propres  $\lambda_i$ , on obtient :

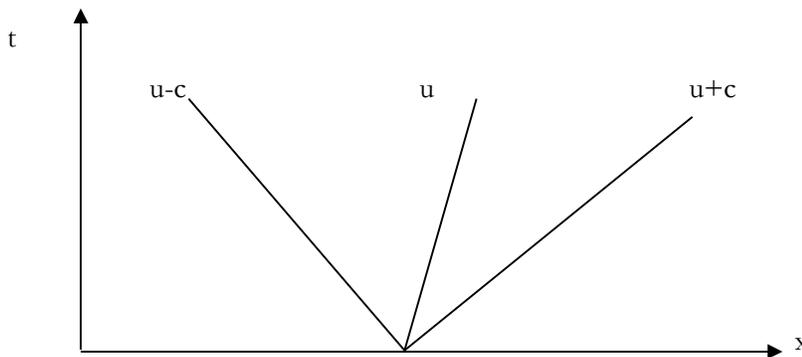
$dP - \rho c du = 0$  suivant les lignes de pente  $dx/dt = u - c = \lambda_1$  (dans un diagramme (x,t)),

$dP - c^2 d\rho = 0$  suivant les lignes de pente  $dx/dt = u = \lambda_2$ ,

$dP + \rho c du = 0$  suivant les lignes de pente  $dx/dt = u + c = \lambda_3$ .

*Interprétation.*

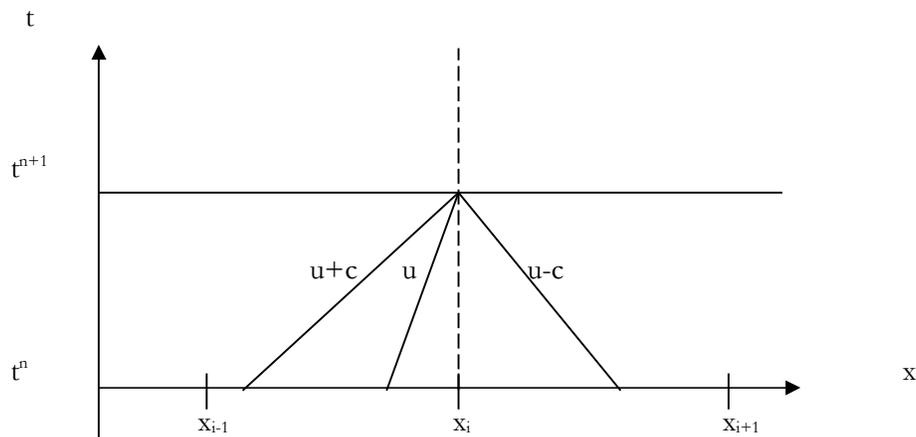
A chaque instant, en tout point de l'écoulement, en l'absence d'onde de choc et de discontinuité de contact, trois ondes élémentaires sont émises suivant les directions  $u+c$ ,  $u-c$  et  $u$ .



Ces ondes sont d'amplitude plus ou moins grande. Lorsque l'écoulement est au repos, ces ondes sont d'amplitude nulle, mais toujours présentes.

Suivant l'onde  $u-c$ , la variation de pression  $dP$  est liée à la variation de vitesse  $du$  d'après la relation  $dP - \rho c du = 0$ . Le même type de relation apparaît pour les deux autres ondes.

Il s'ensuit qu'on peut tirer profit de ces relations caractéristiques pour développer une première méthode numérique. Cette méthode est appelée **'méthode des caractéristiques'**. C'est la méthode la plus ancienne, peut être la plus précise dans le cas 1D, mais aussi la moins générale, la plus lourde et la plus coûteuse. Néanmoins, c'est une bonne méthode pour analyser des résultats ou comprendre le comportement d'un écoulement. Cette méthode permet aussi de traiter les conditions aux limites, ou d'analyser la façon dont il faut les traiter. La méthode s'illustre sur le schéma suivant :



A l'instant  $t_n$ , on connaît tous les vecteurs de variables aux points  $x_{i-1}$ ,  $x_i$  et  $x_{i+1}$  :  $W_{i-1}^n$ ,  $W_i^n$  et  $W_{i+1}^n$  respectivement. On cherche à déterminer à l'instant  $t_{n+1}$  et au point  $x_i$  le vecteur  $W_i^{n+1}$ . Il existe une onde se propageant à la vitesse  $u+c$ , partant d'un point  $x_1$  situé entre  $x_{i-1}$  et  $x_i$  qui va atteindre le point  $x_i$  à l'instant  $t_{n+1}$ . De même, le point  $x_2$  est le point de départ de l'onde  $u$  etc. Les positions  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  ne sont à priori pas connues. Pour estimer leurs positions, on initialise le vecteur  $W_i^{n+1}$  avec les variables de l'instant  $t_n$  :  $W_i^{n+1} = W_i^n$ . On initialise aussi les variables en  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  :  $W_1 = W_i^n$ ,  $W_2 = W_i^n$  et  $W_3 = W_i^n$ . La façon dont cette initialisation est réalisée n'a pas grande importance.

On calcule ensuite les pentes moyennes des ondes le long des lignes caractéristiques :

$$\frac{dW}{dx} = \frac{(u+c)_i^{n+1} + (u+c)_{x1}}{2}$$

$$\frac{dW}{dx} = \frac{u_i^{n+1} + u_{x2}}{2}$$

$$\overline{u-c} = \frac{(u-c)_i^{n+1} + (u-c)_{x_3}}{2}$$

Connaissant la position de  $x_i$  on calcule les positions de  $x_1, x_2$  et  $x_3$  par :

$$x_1 = x_i - \overline{u+c} (t^{n+1} - t^n)$$

$$x_2 = x_i - \overline{u} (t^{n+1} - t^n)$$

$$x_3 = x_i - \overline{u-c} (t^{n+1} - t^n)$$

On détermine alors, à l'aide d'une simple interpolation linéaire les vecteurs  $W_1$ ,  $W_2$  et  $W_3$ .

$$W_1 = W_{i-1} + (W_i - W_{i-1}) \begin{pmatrix} x_1 - x_{i-1} \\ x_i - x_{i-1} \end{pmatrix} \text{ etc.}$$

On utilise maintenant les relations caractéristiques afin de déterminer le vecteur  $W_i^{n+1}$ :

$$* dx/dt = u - c = \lambda_1 \text{ est associée à } dP - \rho c du = 0 \text{ qui donne : } (P_i^{n+1} - P_3) - \overline{\rho c} (u_i^{n+1} - u_3) = 0$$

$$\text{avec } \overline{\rho c} = \frac{\rho c_i^{n+1} + \rho c_3}{2},$$

$$* dx/dt = u = \lambda_2 \text{ est associée à } dP - c^2 d\rho = 0 \text{ qui donne : } (P_i^{n+1} - P_2) - \overline{c^2} (\rho_i^{n+1} - \rho_3) = 0$$

$$\text{avec } \overline{c^2} = \frac{c_i^{2n+1} + c_3^2}{2},$$

$$* dx/dt = u + c = \lambda_3 \text{ est associée à } dP + \rho c du = 0 \text{ qui donne : } (P_i^{n+1} - P_1) + \overline{\rho c} (u_i^{n+1} - u_1) = 0$$

$$\text{avec } \overline{\rho c} = \frac{\rho c_i^{n+1} + \rho c_1}{2}.$$

Lorsque le vecteur  $W_i^{n+1}$  est déterminé, on revient au départ de la procédure car les pentes moyennes des ondes ont changé. On itère ce procédé jusqu'à convergence : par exemple lorsque  $x_1^l$  et  $x_1^{l+1}$  sont égales à une tolérance près.

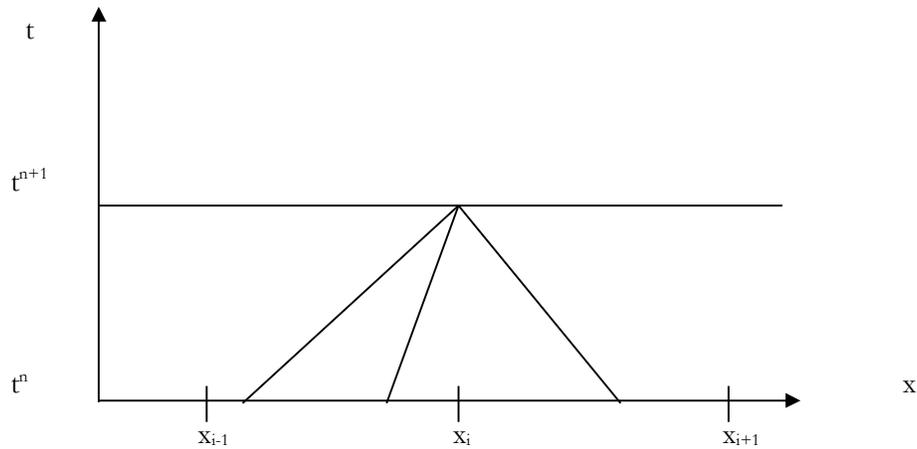
Cette méthode est précise mais :

- n'est pas adaptée au cas 2D (trop compliquée à mettre en œuvre),
- lorsque des discontinuités sont présentes (chocs etc.). Il faut alors les suivre explicitement dans le maillage.

C'est pour ces raisons que nous allons étudier plus précisément le schéma de Godunov qui ne souffre pas de ces défauts.

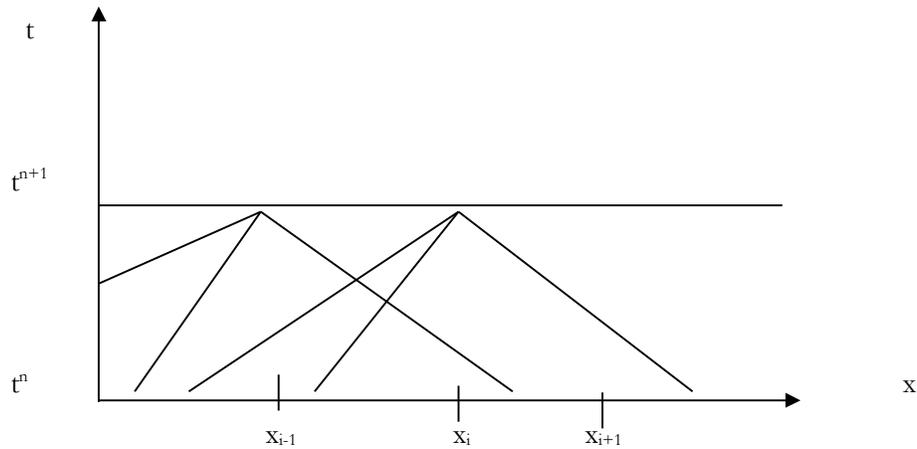
*Remarque. Critère de stabilité*

Nous avons vu que pour le calcul de  $W_i^{n+1}$  on utilisait 3 ondes :



Lorsque le pas d'espace est fixe :  $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ , cela fixe aussi le pas de temps :

- les ondes arrivant au point  $x_i^{n+1}$  ne doivent pas venir de mailles plus éloignées. Si le pas de temps est choisis trop grand, la situation représentée ci-après va se produire :



Des ondes caractéristiques se croisent et les relations caractéristiques ne sont plus valables ( $dP + \rho c du = 0$ ). A chaque point de croisement, une variation  $dP$ ,  $du$  ou  $d\rho$  est véhiculée par l'autre onde et vient modifier la pente de l'onde, qui n'est alors plus linéaire. Ainsi, le pas de temps maximum est défini comme étant celui pour lequel aucun croisement ne peut se produire :

$$\Delta t_{\max} = \frac{\Delta x}{2 \max((u + c), (u - c))}$$

*Invariants de Riemann*

Les invariants de Riemann sont des relations du même type que les relations caractéristiques mais se présentent sous forme intégrale plutôt que sous forme différentielle. Elles sont donc plus pratiques d'usage et sont à la base de la résolution **du problème de Riemann**, qui est lui-même la pierre angulaire de toutes les méthodes numériques récentes et efficaces pour la résolution de systèmes hyperboliques.

On se souvient que pour les ondes de choc, on possède les relations de Rankine Hugoniot qui permettent le calcul des variables après passage de ces ondes. Les invariants de Riemann jouent le même rôle que les relations de Rankine Hugoniot, à la différence qu'il permettent le calcul des variables au passage des ondes de détente et au travers des discontinuités de contact.

Considérons le système

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \text{ avec } U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \text{ et le vecteur propre de droite } K_i \text{ associée à la valeur propre}$$

$$\lambda_i \text{ de la matrice } A : K_i = \begin{pmatrix} k_1^i \\ k_2^i \\ k_3^i \end{pmatrix}. \text{ Les invariants de Riemann au travers de l'onde } \lambda_i \text{ sont définis}$$

$$\text{par (3-1) équations différentielles (3 est ici la dimension du système) : } \frac{du_1}{k_1^i} = \frac{du_2}{k_2^i} = \frac{du_3}{k_3^i}.$$

Exemple. Equations d'Euler

$$u_1 = \rho, u_2 = \rho u \text{ et } u_3 = \rho E$$

$$\lambda_1 = u - c \text{ et } K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ u - c \\ H - uc \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = u \text{ et } K_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ 1/2u^2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = u + c \text{ et } K_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ u + c \\ H + uc \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi, au travers de l'onde } \lambda_2, \text{ les invariants de Riemann s'écrivent : } \frac{d\rho}{1} = \frac{d\rho u}{u} = \frac{d\rho E}{\frac{1}{2}u^2},$$

C'est à dire :  $d\rho = \frac{\rho du + u d\rho}{u} = d\rho + \frac{\rho du}{u}$ , ainsi  $du = 0 \Rightarrow u = cst$ .

De même,  $d\rho = \frac{d\rho E}{\frac{1}{2}u^2}$ , donne  $\rho dE + E d\rho = \frac{1}{2}u^2 d\rho$ . En utilisant le définition de l'énergie

totale :  $\rho(de + d(1/2u^2)) + (e + 1/2u^2)d\rho = \frac{1}{2}u^2 d\rho$ , on obtient alors :

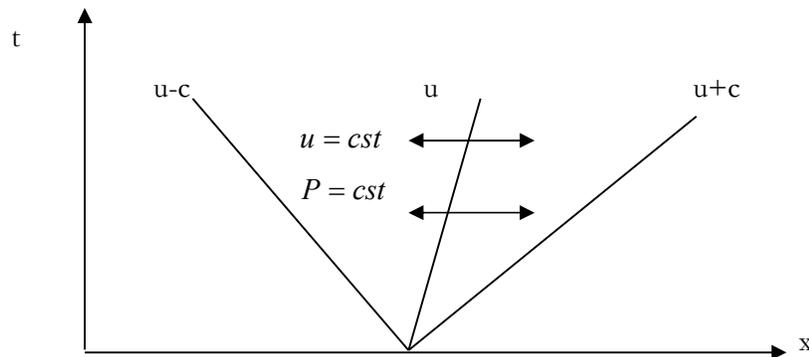
$$\rho de + ed\rho + \rho u du = 0$$

comme  $du = 0$ ,

on a alors  $d(\rho e) = 0$ ,

et comme  $P = (\gamma - 1)\rho e$ , on a aussi  $dP = 0$ , c'est à dire  $P = cst$ .

Les relations de passage au travers d'une onde se propageant à la vitesse  $u$  sont donc  $u = cst$  et  $P = cst$  :

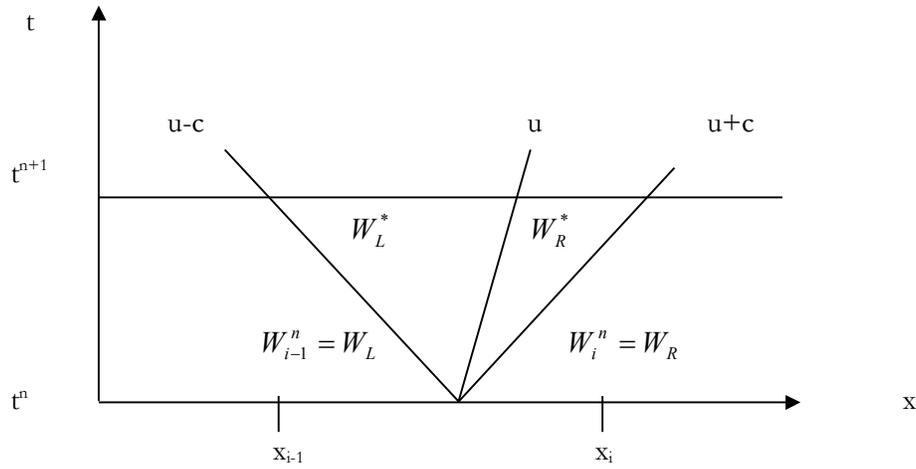


On peut montrer sans difficulté que les différentes relations de passage au travers des diverses ondes sont (en gaz parfait) :

- $\lambda_1 = u - c \Rightarrow u + 2c/(\gamma - 1) = cst$  et  $s = cst$  ( $s$  désigne l'entropie)
- $\lambda_2 = u \Rightarrow u = cst$  et  $P = cst$
- $\lambda_3 = u + c \Rightarrow u - 2c/(\gamma - 1) = cst$  et  $s = cst$

*Exemple d'utilisation.*

On connaît l'état du fluide à un instant donné et on cherche à déterminer le nouvel état après passage des ondes :



Les états dans lesquels se propagent les ondes de droite et de gauche sont connus :  $W_L$  et  $W_R$ .

On cherche à déterminer les états du fluide après passage des ondes :  $W_L^*$  et  $W_R^*$ .

Remarquons d'abord qu'une des relations de passage au travers des ondes de droite et de gauche correspond à la non variation de l'entropie :  $s = cst$ .

On se souvient que la définition de la vitesse du son pour un gaz parfait est :

$$c^2 = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s = \gamma \frac{P}{\rho}, \text{ ainsi } ds = 0 \Leftrightarrow \frac{dP}{P} = \gamma \frac{d\rho}{\rho}, \text{ dont l'intégration conduit à : } \frac{P}{\rho^\gamma} = cst.$$

Ecrivons maintenant les invariants de Riemann dont on dispose au travers de chaque onde :

$$u_L^* + 2c_L^* / (\gamma - 1) = u_L + 2c_L / (\gamma - 1) = Q_L$$

$$\frac{P_L^*}{\rho_L^{*\gamma}} = \frac{P_L}{\rho_L^\gamma}$$

et

$$u_R^* - 2c_R^* / (\gamma - 1) = u_R + 2c_R / (\gamma - 1) = Q_R$$

$$\frac{P_R^*}{\rho_R^{*\gamma}} = \frac{P_R}{\rho_R^\gamma}$$

ainsi que

$$u_R^* = u_L^*$$

$$P_R^* = P_L^*$$

En combinant ces relations afin d'éliminer la vitesse, puis en utilisant la définition de la vitesse du son et les relations isentropiques, on obtient une expression qui permet le calcul de la pression

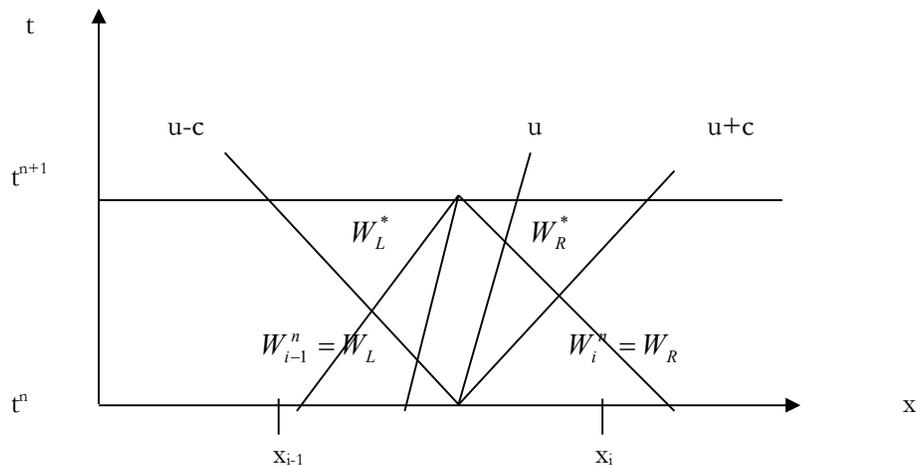
$$P^* = P_R^* = P_L^* :$$

$$Q_L - Q_R = 2/(\gamma - 1)\sqrt{\gamma}P^{*\frac{\gamma-1}{2\gamma}}\left(\sqrt{\frac{P_L^{1/\gamma}}{\rho_L}} + \sqrt{\frac{P_R^{1/\gamma}}{\rho_R}}\right)$$

Dès que  $P^*$  est connu, les autres variables s'en déduisent à l'aide des mêmes équations.

Attention : ce calcul n'est valable qu'en l'absence de chocs. Il est par contre plus efficace que le calcul précédé avec les relations caractéristiques, puisque aucune itération n'est nécessaire.

On peut toutefois obtenir le même type de solution, à l'aide de quelques approximations, avec les relations caractéristiques, sans itération.



Les relations caractéristiques dont on dispose sont (on note  $C = \rho c$ ) :

$$P^* - C_R u^* = P_R - C_R u_R$$

$$P^* + C_L u^* = P_L + C_L u_L$$

(on a utilisé les invariants de Riemann au travers de l'onde  $u$  :  $P^* = P_R^* = P_L^*$  et  $u^* = u_R^* = u_L^*$ )

En combinant ces deux relations, on obtient :  $u^* = \frac{C_L u_L + C_R u_R + P_L - P_R}{C_L + C_R}$ .

On détermine de la même façon la pression  $P^* = \frac{1}{C_L + C_R}(C_R P_L + C_L P_R + C_L C_R (u_L - u_R))$ .

Les autres grandeurs s'en déduisent.

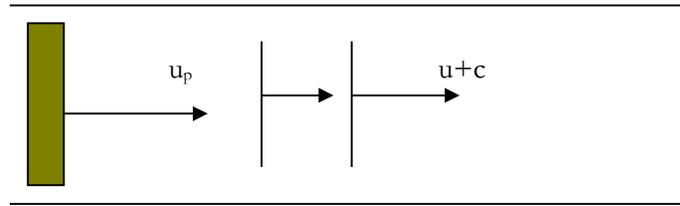
Ce résultat n'est encore valable qu'en l'absence de choc. Mais au fait, que sont les chocs ?

*Ondes de choc*

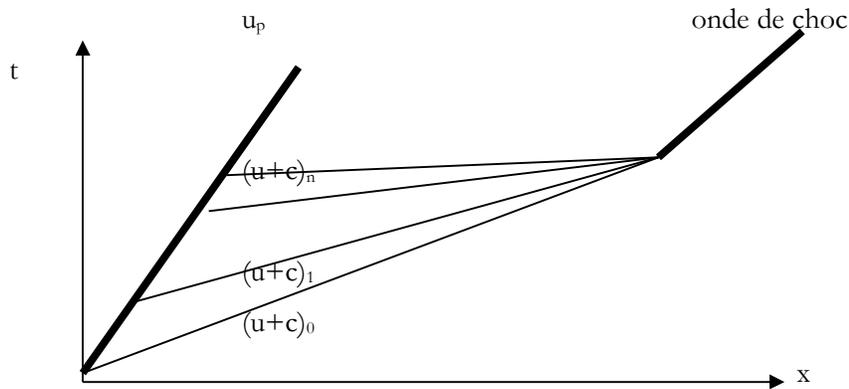
Nous avons déjà beaucoup parlé d'onde de choc sans toutefois les définir. Les ondes de choc sont des ondes discontinues qui résultent de la coalescence d'ondes élémentaires  $u+c$  ou  $u-c$ .

*Exemple*

Un piston avance avec une grande vitesse dans un tube. A chaque instant il émet des ondes de compression qui se propagent à la vitesse  $u+c$  et qui le précèdent.

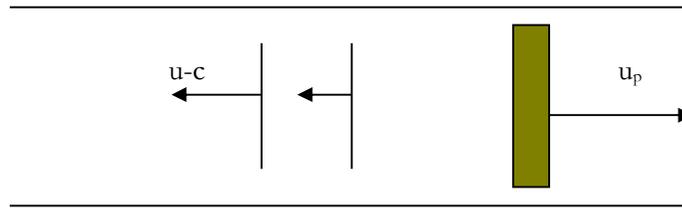


Si on observe dans un diagramme  $(x,t)$  la propagation de ces ondes, on va remarquer que les ondes de compression se rattrapent : elles coalescent.

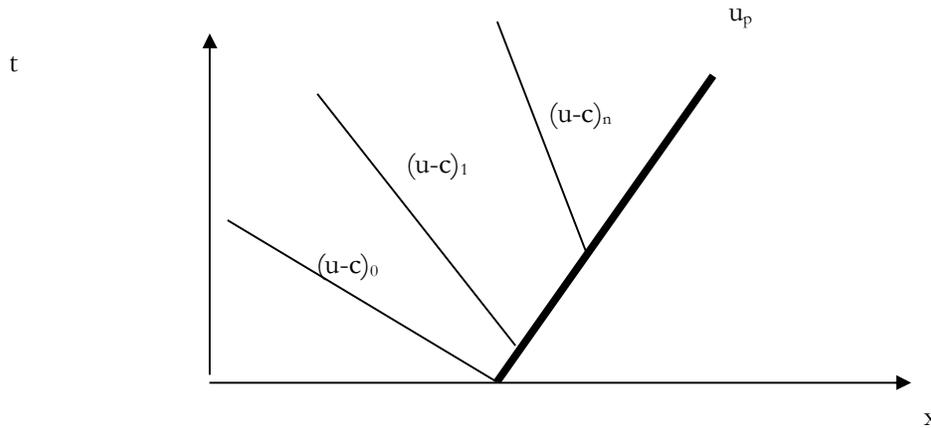


A chaque instant une onde  $(u+c)$  est émise par le piston. La première onde se propage à la vitesse  $u_0+c_0$  ou  $u_0=0$  est la vitesse initiale du fluide et  $c_0$  la vitesse du son dans ce milieu. Au passage de cette onde, la vitesse augmente de  $\Delta u$ , la pression de  $\Delta P$  suivant :  $u - 2c/(\gamma - 1) = cst$  (invariant de Riemann au travers de cette onde). Comme  $u_0 - 2c_0/(\gamma - 1) = u_1 - 2c_1/(\gamma - 1) \Rightarrow c_1 = c_0 + (u_1 - u_0)(\gamma - 1)/2$ . Si  $u_1 > u_0$  alors  $c_1 > c_0$ . Or, la vitesse du fluide augmente progressivement pour s'établir à la vitesse imposée par le piston. Ainsi, chaque onde  $(u+c)$  est plus rapide que la précédente, jusqu'à atteinte de la vitesse  $u_p$  par le fluide. Ces ondes coalescent et forment une discontinuité de pression, densité, vitesse que l'on appelle onde de choc.

Inversement, lors d'une détente, la formation d'un choc n'est pas possible :



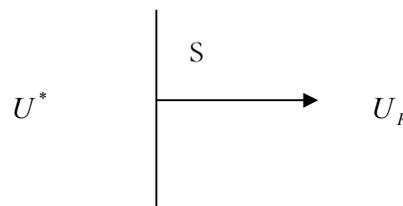
Le fait de tirer le fluide avec ce piston, au lieu de le compresser, a pour effet de le détendre (la pression chute). Par ailleurs, les ondes vont s'éloigner les unes des autres :



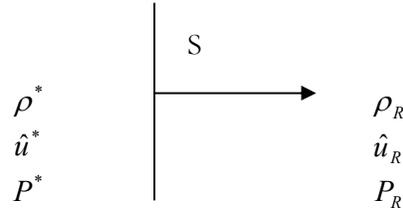
L'invariant de Riemann associé à ces ondes est  $u + 2c/(\gamma - 1) = cst$ , donc  $u_0 + 2c_0/(\gamma - 1) = u_1 + 2c_1/(\gamma - 1)$ . Indéniablement,  $u_1 > u_0$  puisque le fluide est mis en mouvement par le piston, ainsi  $c_1 = c_0 + (u_0 - u_1)(\gamma - 1)/2$  et  $c_1 < c_0$ , et par voie de conséquence,  $u_1 - c_1 < u_0 - c_0$ .

Les relations qui permettent le calcul des variables au travers des ondes de choc sont les relations de Rankine - Hugoniot. Au travers des chocs, pression, densité, vitesse, énergie interne, subissent des variations discontinues : un saut.

Pour déterminer les relations de Rankine-Hugoniot, il est commode de se placer dans le repère du choc. Ainsi, le choc apparaît comme stationnaire. Il s'agit de déterminer les variables  $U^*$  partant d'un état connu  $U_R$  à droite du choc. Le choc est supposé se propager à la vitesse  $S$ .



En effectuant un changement de repère, l'onde va apparaître comme stationnaire. La densité, pression et énergie interne sont inchangées par cette transformation. Par contre, la vitesse est bien sûr modifiée :



avec  $\hat{u}^* = u^* - S$  et  $\hat{u}_R = u_R - S$ .

Les équations d'Euler sont des équations de bilan. Elles traduisent les principes de conservation.

Une onde de choc, même discontinue doit satisfaire ces principes.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + P)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial u(\rho E + P)}{\partial x} = 0$$

On effectue le changement de repère :  $\bar{t} = t$ ,  $\bar{x} = x - St$  et  $\bar{u} = u - S$ .

Ce changement de repère correspond au principe le plus élémentaire des lois de la physique (non relativiste): le principe d'invariance Galiléenne. Les lois de la physique écrites dans un repère fixe doivent être les mêmes que dans un repère mobile se déplaçant à vitesse constante.

**Remarque.** Pour des modèles d'équations très connus et élaborés par d'éminents scientifiques, il est évident que ce principe est satisfait. Mais il y a de nombreuses situations où le modèle mathématique n'est pas évident. Il s'agit alors de construire des équations adaptées au problème à étudier. C'est le rôle de l'ingénieur modélisateur. Il est courant qu'en construisant un modèle basé sur le "bon sens", on soit amené, sans s'en apercevoir, à violer ce principe. Ceci signifie que le modèle est erroné et qu'il est nécessaire de la corriger.

Ici, le changement de repère va nous servir à vérifier l'invariance Galiléenne des équations d'Euler et à obtenir les relations de Rankine Hugoniot.

En raison du changement de coordonnées, les opérateurs de dérivation sont modifiés :

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \bar{t}}{\partial t} = -S \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial}{\partial \bar{t}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \bar{t}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial}{\partial x}$$

Appliquons ces transformations successivement aux différentes équations du modèle. On commence avec l'équation de conservation de la masse.

$$\frac{\partial \rho}{\partial \bar{t}} - S \frac{\partial \rho}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \rho(\bar{u} + S)}{\partial \bar{x}} = 0, \text{ c'est à dire } \frac{\partial \rho}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \rho \bar{u}}{\partial \bar{x}} = 0.$$

On traite de la même façon l'équation du mouvement :

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + P)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \rho(\bar{u} + S)}{\partial \bar{t}} - S \frac{\partial \rho(\bar{u} + S)}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \rho(\bar{u} + S)^2}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial P}{\partial \bar{x}} = 0$$

$$\frac{\partial \rho \bar{u}}{\partial \bar{t}} + S \frac{\partial \rho}{\partial \bar{t}} - S \frac{\partial \rho \bar{u}}{\partial \bar{x}} - S^2 \frac{\partial \rho}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \rho \bar{u}^2}{\partial \bar{x}} + 2S \frac{\partial \rho \bar{u}}{\partial \bar{x}} + S^2 \frac{\partial \rho}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial P}{\partial \bar{x}} = 0$$

$$\frac{\partial \rho \bar{u}}{\partial \bar{t}} + S \left( \frac{\partial \rho}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \rho \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial \rho \bar{u}^2}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial P}{\partial \bar{x}} = 0$$

$$\text{donc, } \frac{\partial \rho \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \rho \bar{u}^2}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial P}{\partial \bar{x}} = 0.$$

On termine par l'équation d'énergie :

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial u(\rho E + P)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial \bar{t}} - S \frac{\partial \rho E}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{u}(\rho E + P)}{\partial \bar{x}} + S \frac{\partial \rho E}{\partial \bar{x}} + S \frac{\partial P}{\partial \bar{x}} = 0$$

$$\text{or, } E = e + 1/2 u^2 = e + 1/2 (\bar{u} + S)^2 = e + 1/2 \bar{u}^2 + S(S/2 + \bar{u}) = \bar{E} + S(S/2 + \bar{u}),$$

donc,

$$\frac{\partial \rho \bar{E}}{\partial \bar{t}} + S^2/2 \frac{\partial \rho}{\partial \bar{t}} + S \frac{\partial \rho \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{u} \rho \bar{E}}{\partial \bar{x}} + S^2/2 \frac{\partial \rho \bar{u}}{\partial \bar{x}} + S \frac{\partial \rho \bar{u}^2}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{u} P}{\partial \bar{x}} + S \frac{\partial P}{\partial \bar{x}} = 0$$

c'est à dire,

$$\frac{\partial \rho \bar{E}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{u}(\rho \bar{E} + P)}{\partial \bar{x}} + S \left( \frac{\partial \rho \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \rho \bar{u}^2}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial P}{\partial \bar{x}} \right) = 0$$

on obtient alors:

$$\frac{\partial \rho \bar{E}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{u}(\rho \bar{E} + P)}{\partial \bar{x}} = 0$$

Cette vérification n'est pas une garantie de la validité du modèle. C'est néanmoins un test facile qui permet de s'assurer que le modèle ne contient pas d'erreur grossière. D'autres tests sont possibles, mais ils n'ont en principe pas la même généralité et simplicité que celui-ci.

En posant maintenant que  $S$  est la vitesse du choc, les équations sont maintenant écrites dans le repère du choc. En se plaçant dans son repère, l'écoulement apparaît stationnaire. Ainsi, les équations de conservation se réduisent à :

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{x}} = 0 & \bar{\rho} \bar{u} = cst \\ \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{u}^2 + P)}{\partial \bar{x}} = 0 & \text{c'est à dire} \quad \bar{\rho} \bar{u}^2 + P = cst \quad \begin{array}{l} \text{Relations de Rankine} \\ \text{Hugoniot} \end{array} \\ \frac{\partial \bar{u}(\bar{\rho} \bar{E} + P)}{\partial \bar{x}} = 0 & \bar{u}(\bar{\rho} \bar{E} + P) = cst \end{array}$$

On les écrit généralement :

$$\begin{aligned} \rho_R(u_R - S) &= \rho^*(u^* - S) \\ \rho_R(u_R - S)^2 + P_R &= \rho^*(u^* - S)^2 + P^* \\ \rho_R(e_R + 1/2(u_R - S)^2 + P_R)(u_R - S) &= \rho^*(e^* + 1/2(u^* - S)^2 + P^*)(u^* - S) \end{aligned}$$

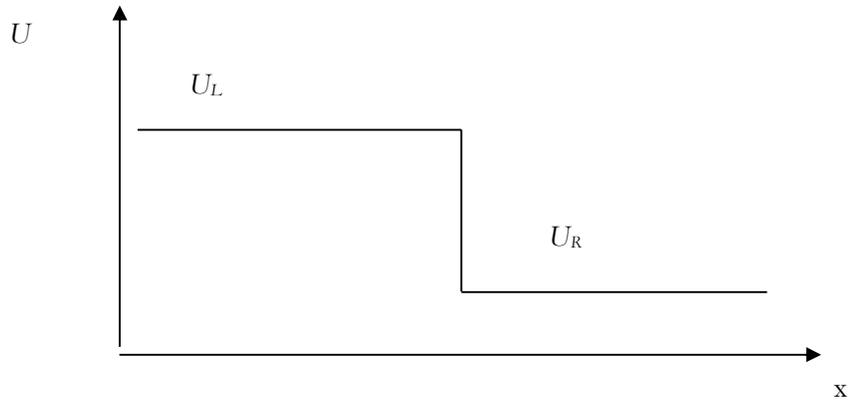
Ces équations forment un système de 3 équations à 5 inconnues. Une des inconnues est supprimée par l'utilisation de l'équation d'état. Pour connaître l'ensemble de l'état du fluide derrière une onde de choc, il faut donc connaître une des variables du fluide en aval de l'onde (par exemple, la vitesse du fluide, qui sera égale à la vitesse du piston), ou la vitesse de l'onde.

### ***Le problème de Riemann***

Le problème de Riemann est la pierre angulaire de toutes les méthodes numériques que nous allons voir par la suite. Sa résolution fait appel à tout ce que nous avons vu précédemment.

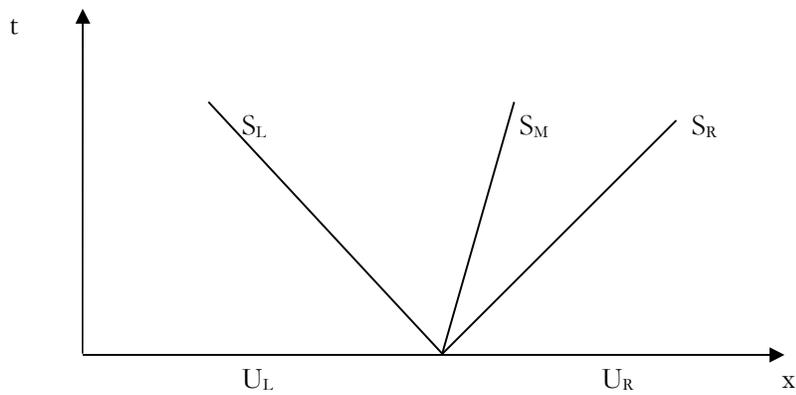
Le problème de Riemann revient à poser la question de l'évolution de la solution partant d'une solution initiale connue et discontinue.

*Rappelons que cette situation correspond exactement aux conditions qui règnent dans deux mailles voisines, à un instant donné, et que l'on désire calculer la solution à l'instant suivant.*



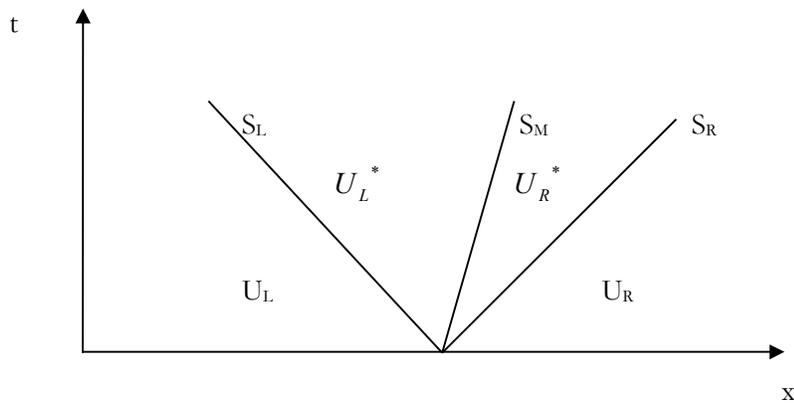
On cherche donc la solution des équations d'Euler partant de cette condition initiale.

Nous avons vu précédemment que tout point d'un écoulement émettait en permanence 3 ondes :



$S_R$  désigne l'onde de droite, qui peut être un choc ou une onde élémentaire  $u+c$ ,  $S_L$  désigne l'onde de gauche, qui peut être un choc faisant face à gauche ou une onde élémentaire  $u-c$ , tandis que  $S_M$  est l'onde élémentaire  $u$ . Ainsi, 4 combinaisons sont possibles: choc à droite – détente à gauche, choc à gauche – détente à droite, choc à droite – choc à gauche, détente à droite – détente à gauche.

Résoudre le problème de Riemann revient à déterminer les états  $U_R^*$  et  $U_L^*$ , ainsi que les vitesses des ondes.



Ces états peuvent être déterminés de façon exacte, lorsque le fluide est régi par la loi d'état des gaz parfaits. La procédure est due à Godunov (1959). Nous allons la résumer ci-après.

1) On choisit une pression arbitraire  $P^*$  qui est commune aux états  $U_L^*$  et  $U_R^*$ . En effet, nous avons vu que les invariants de Riemann au travers de  $S_M$  étaient:  $P^* = P_R^* = P_L^*$  et  $u^* = u_R^* = u_L^*$ .

2) \* Si  $P^* > P_R$ , on va utiliser les relations du choc pour l'onde de droite. Dans ce cas, la donnée de  $P^*$  permet le calcul complet de l'état  $U_R^*$  par les relations de Rankine Hugoniot et de la loi d'état, ainsi que la détermination de la vitesse du choc  $S_R$ . Rappelons que les relations de Rankine Hugoniot constituent un système de 3 équations à 5 inconnues. La donnée de l'équation d'état fournit une 4<sup>ème</sup> relation. La donnée de la pression permet de fermer le système.

\* Si  $P^* < P_R$ , l'onde de droite est une détente, et on va utiliser les relations des ondes élémentaires :  $u - 2c/(\gamma - 1) = cst$  et  $s = cst$  ou  $P/\rho^\gamma = cst$  dans le cas du gaz parfait. De nouveau, la donnée de  $P^* = P_L^*$  permet la détermination de tout l'état  $U_L^*$ .

3) On procède de la même façon pour l'onde de gauche :

\* Si  $P^* > P_L$  on utilise les relations du choc,

\* Si  $P^* < P_L$  on utilise les invariants de Riemann associés et les relations isentropiques.

4) On connaît alors tout des états  $U_L^*$  et  $U_R^*$  compte tenu de l'estimation initiale de  $P^*$ . On vérifie alors que cette estimation est correcte en comparant  $u_L^*$  et  $u_R^*$ . Ces deux vitesses doivent être égales (invariant de Riemann de l'onde u).

Si cette condition n'est pas satisfaite, on modifie  $P^*$  jusqu'à ce que  $u_L^* = u_R^*$ .

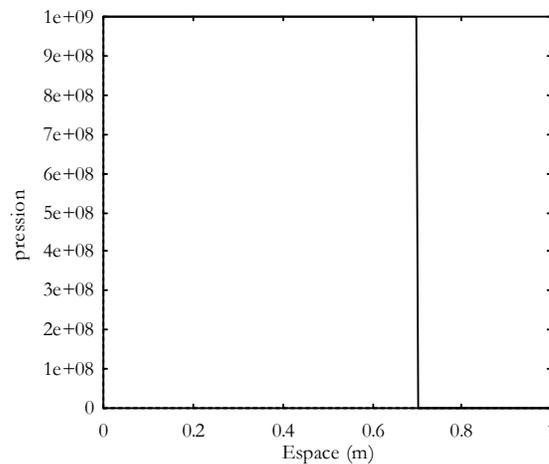
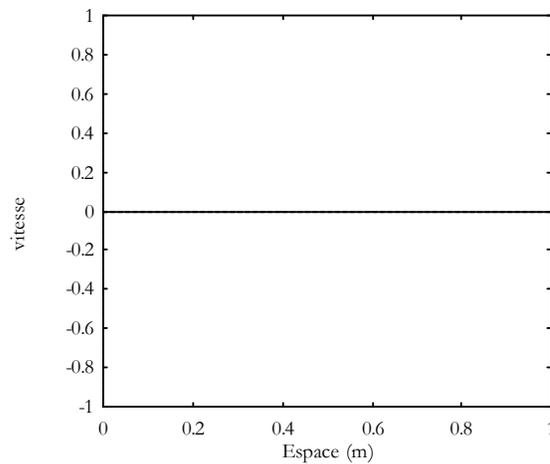
Cette procédure itérative peut être réalisée par la méthode de Newton Raphson. L'ensemble de cette méthode est décrite dans Godunov et al. (1979). En annexe on trouvera un listing de programme où ces relations sont résolues de façon exacte par la méthode du point fixe. Le programme est réalisé pour l'équation d'état stiffened gas  $P = (\gamma - 1)\rho e - \gamma P_\infty$  et est donc valide aussi pour la loi d'état du gaz parfait, qui est un cas particulier.

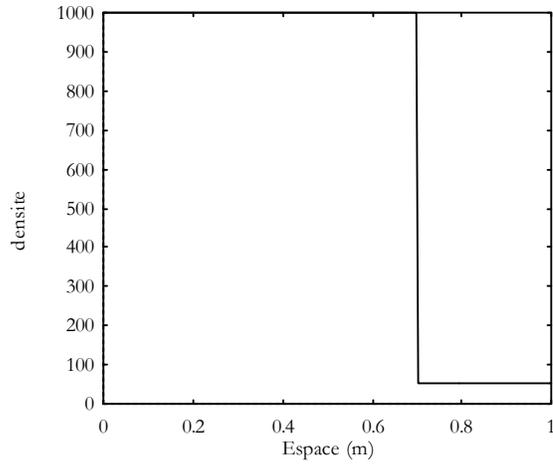
Montrons quelques exemples de solution obtenues par la résolution de problème de Riemann.

Comme l'équation d'état stiffened gas permet de traiter des solides, liquides ou gaz, considérons un problème faisant intervenir un liquide et un gaz.

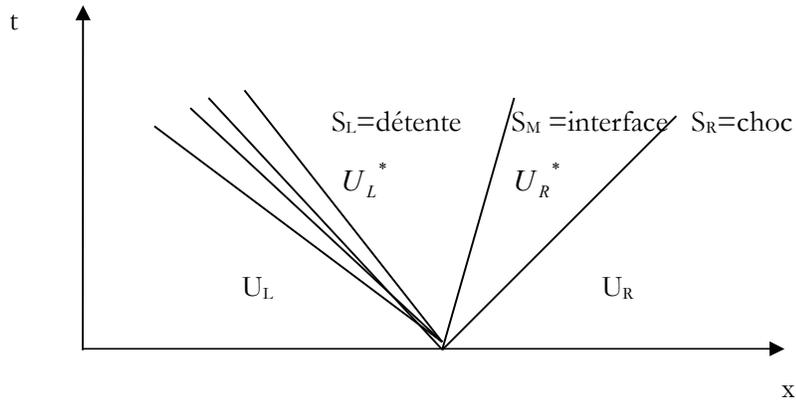
Dans un tube, on dispose à gauche de l'eau ( $\gamma=4.4$ , et  $P_{inf}=6.10^8$  Pa) à la pression initiale de  $10^9$  Pa, à la densité de  $1000 \text{ kg/m}^3$  et au repos ( $u=0 \text{ m/s}$ ). A droite, on va disposer de l'air ( $\gamma=1.4$ , et  $P_{inf}=0$  Pa) à la pression initiale de  $10^5$  Pa, à la densité de  $50 \text{ kg/m}^3$  aussi au repos.

Les conditions initiales du problème sont représentées ci-après:

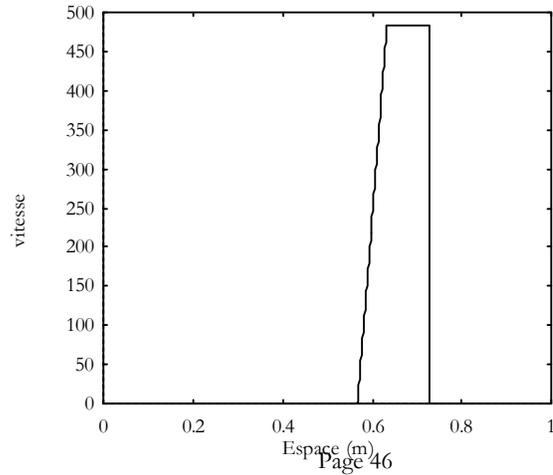


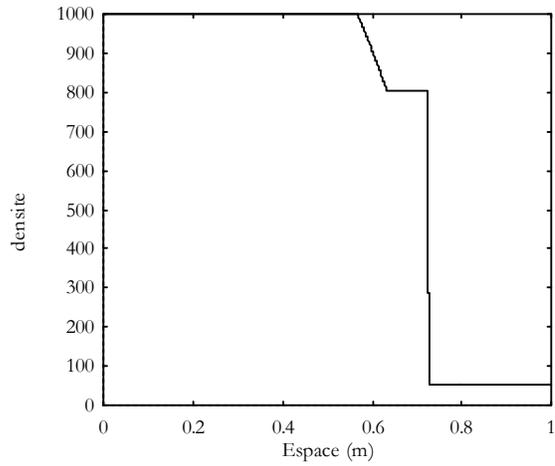
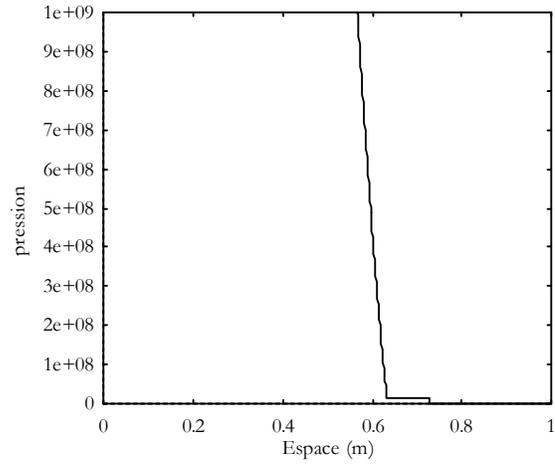


Le rapport considérable de pression présent entre la chambre gauche et la chambre droite est à l'origine de l'apparition d'une onde de choc se propageant dans l'air à droite, et d'une onde de détente se propageant dans l'eau à gauche. Entre les deux, l'interface eau-air se propage. Dans un diagramme (x,t) on a donc:



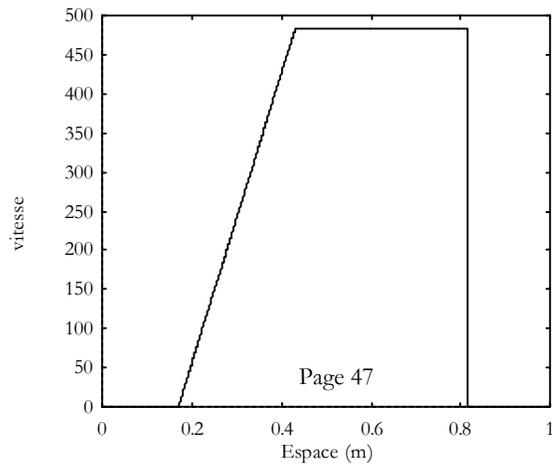
On observe d'abord la solution à l'instant  $t=50 \mu s$ .

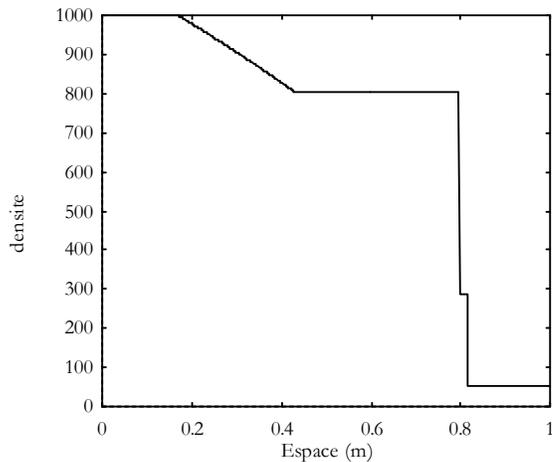
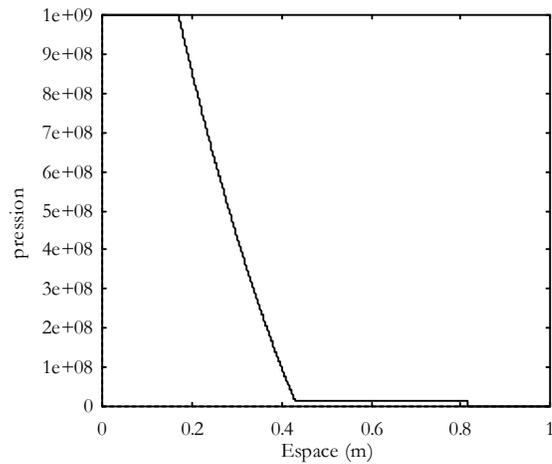




On observe nettement la propagation du choc à droite, et de la détente à gauche. Cette solution est exactement la solution du problème du tube à choc vu en cours d'écoulements compressibles.

On représente les mêmes résultats à l'instant  $t=200 \mu\text{s}$ .





On observe que le choc et la détente ont la même intensité. La seule différence est que les ondes se sont propagées plus loin. La solution est donc parfaitement similaire. Ceci est normal, puisque le choc et la détente se propagent dans des milieux constants à droite et à gauche.

Une telle solution est dite auto-semblable.

Dans le cadre de la méthode de Godunov, il faut donc résoudre un tel problème, pour chaque bord de maille, et à chaque pas de temps.

Il est courant de traiter des problèmes comportant des milliers, voire des millions de mailles. Comme la solution est obtenue au bout d'autant de pas de temps (voire plus), le nombre de problèmes de Riemann qu'il faut résoudre varie entre  $10^6$  et  $10^{12}$ . Résoudre le problème de

Riemann de façon exacte est parfois trop coûteux, ou trop complexe si les équations d'état s'éloignent de la loi stiffened gas, ou le système d'équation s'éloigne des équations d'Euler (problèmes multiphasique). C'est pourquoi on résout souvent un problème de Riemann approché.

En pratique, il est rare d'avoir besoin d'une solution exacte du problème de Riemann. Une solution approchée suffit.

Nous avons vu précédemment deux procédures qui permettent d'avoir une solution approchée du problème de Riemann :

- La première suppose que l'onde de droite et de gauche sont des ondes élémentaires (des détentes) et utilise les invariants de Riemann à droite et à gauche, les combine et fournit la solution pour  $P^*$  :

$$Q_{i-1} - Q_{i+1} = 2/(\gamma - 1)\sqrt{\gamma}P^{*\gamma-1} \left( \sqrt{\frac{P_{i-1}^{1/\gamma}}{\rho_{i-1}}} + \sqrt{\frac{P_{i+1}^{1/\gamma}}{\rho_{i+1}}} \right)$$

Lorsque  $P^*$  est connu, il est aisé de déterminer toutes les autres variables par les invariants de Riemann et les relations isentropiques. Cette solution exclue à priori la présence de chocs forts puisqu'elle est basée sur deux ondes simples. En fait, cette solution est suffisamment précise dans la plupart des cas (à l'exception des chocs très forts) car, numériquement une onde de choc sera capturée dans une zone de diffusion numérique, où les sauts d'une maille à l'autre ne seront pas très forts. Comme la solution pour les chocs faibles se rapproche de la solution pour les ondes de compression élémentaires, cette procédure donnera satisfaction.

- La deuxième procédure est basée sur les équations caractéristiques et fournit  $u^*$  et  $P^*$  aisément et le reste des états solutions :

$$u^* = \frac{C_R u_R + C_L u_L + (P_L - P_R)}{C_R + C_L} \text{ avec } C_R = \rho_R c_R \text{ etc.}$$

Cette procédure souffre des mêmes réserves que la précédente, puisque les relations caractéristiques ne sont valables que pour les ondes simples. Notons aussi que cette dernière procédure est valable pour d'autres lois d'état que les gaz parfaits, puisque la vitesse du son intervient à la place d'une fonction faisant intervenir le coefficient polytropique  $\gamma$ . Il s'agit donc d'un solveur assez pratique, mais peu robuste. Dans de nombreux problèmes, ne faisant pas intervenir des chocs forts, il peut s'avérer très efficace.

Il existe bien d'autres solveurs approchés :

- Roe (1981)

- Osher (1983)
- HLL de Harten et al. (1983)
- HLLC de Toro (1994)
- VFRoe de Gallouet (1996)

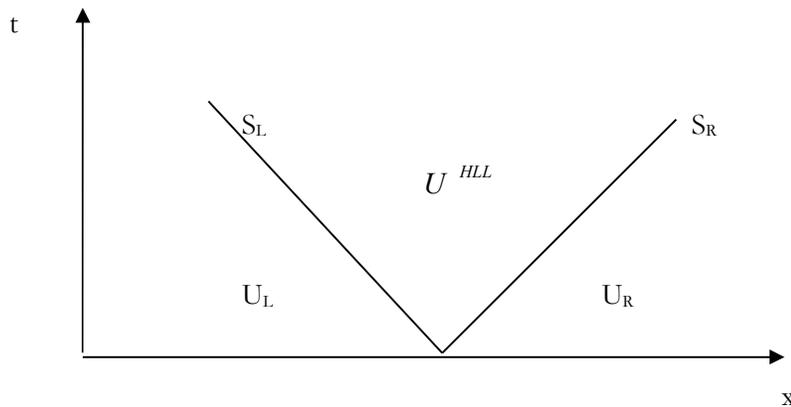
Ils sont plus ou moins complexes et plus ou moins aptes à gérer des configurations générales. Les plus compliqués sont ceux de Roe et Osher. Le plus utilisé dans les laboratoires est celui de Roe. Le plus prometteur est celui de Gallouet (il peut s'appliquer à des systèmes d'équations bien plus complexes que le système d'Euler). Le plus efficace, d'après notre expérience à l'IUSTI, pour les équations d'Euler, en matière de robustesse, précision, facilité d'adaptation aux équations d'état quelconques, est le solveur HLLC de Toro.

Pour ce qui nous intéresse, les écoulements que nous avons à traiter font souvent appel à des lois d'état bien plus complexes que celle des gaz parfaits et aussi à des systèmes d'équations plus complexes que le système d'Euler (les modèles multiphasiques par exemple).

Le solveur HLL est très simple, très robuste, apte à capturer des chocs forts, facilement extensible au cas diphasique mais pas forcément très précis. Néanmoins, pour la grande majorité des cas, il remplit ses fonctions. Le lecteur intéressé trouvera l'établissement du solveur HLLC (qui ne pose pas de difficulté majeure) dans l'ouvrage remarquable de Toro (1997).

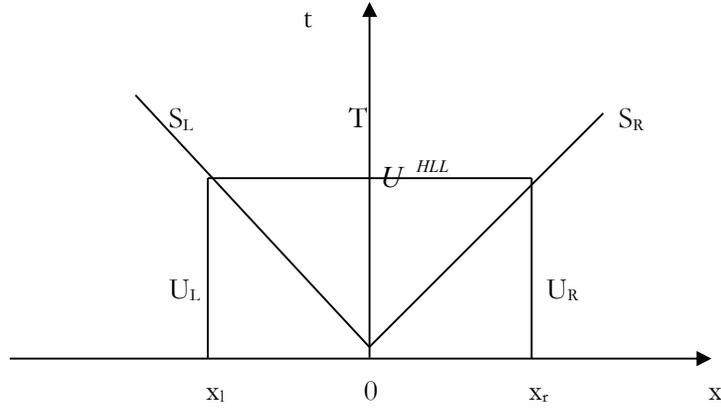
#### Le solveur HLL

Ce solveur est à la base d'autres solveurs plus précis et à peine plus complexes pour les équations d'Euler. Dans le solveur HLL de base, on supprime l'onde intermédiaire. On cherche à calculer un état  $U^{HLL}$  unique, assez proche des états  $U_L^*$  et  $U_R^*$ .



On suppose aussi connues les vitesses des ondes  $S_L$  et  $S_R$ , chocs ou ondes simples. Ce solveur est basé sur une formulation intégrale des lois de conservation (Euler ou autre système). C'est

aussi un des intérêts de ce solveur : généralité sur le système à traiter. Grâce aux hypothèses précédentes, une intégration directe et exacte des équations approchées est possible. On définit un volume de contrôle dans le plan (x,t) :



Le volume ou surface de contrôle est défini par  $S = [0, T] \times [x_l, x_r]$ . On cherche à intégrer dans ce volume :

$$\int_S \left( \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} \right) dS = 0$$

On va chercher à écrire l'intégrale précédente comme la circulation d'un certain vecteur sur le contour délimitant la surface. Il faut pour cela écrire l'intégrale précédente sous la forme du flux du rotationnel d'un vecteur.

$$\int_S \vec{\nabla} \wedge \vec{A} dS = 0$$

En effet, si  $\vec{\nabla} = \vec{x} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{t} \frac{\partial}{\partial t}$  et  $\vec{A} = A_x \vec{x} + A_t \vec{t}$  alors :

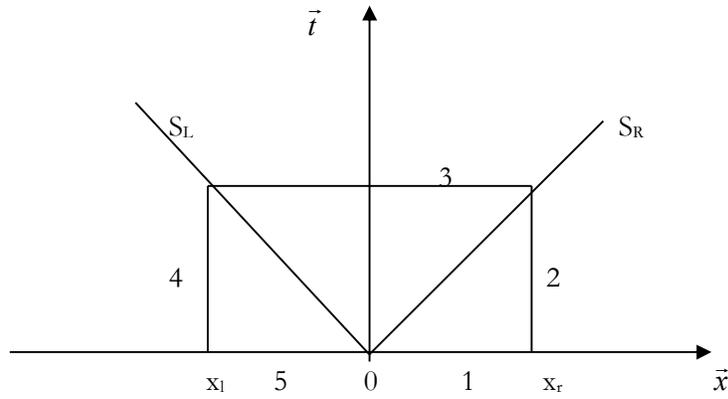
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{t} & \vec{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial t} & 0 \\ A_x & A_t & 0 \end{vmatrix} = \vec{z} \left( \frac{\partial A_t}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \right)$$

Le vecteur  $\vec{A}$  qui nous intéresse est donc :  $A_x = -U$  et  $A_t = F(U)$ , c'est à dire  $\vec{A} = -U\vec{x} + F\vec{t}$ .

On peut maintenant effectuer l'intégration sur le contour  $C$  délimitant la surface  $S$  :

$$\int_S \vec{\nabla} \wedge \vec{A} dS = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{C} = \oint_C (-U\vec{x} + F\vec{t}) \cdot d\vec{C} = 0 \text{ avec } d\vec{C} = dx \vec{x} + dt \vec{t}.$$

On applique cette formule sur chaque segment constituant le contour  $C$  :



$$\oint_1 (-U\bar{x} + F\bar{t}).d\vec{C} = \oint_1 (-U_1\bar{x} + F_1\bar{t}).(dx \bar{x}) = \int_0^{x_r} -U_R dx = -x_r U_R = -TS_R U_R$$

$$\oint_2 (-U\bar{x} + F\bar{t}).d\vec{C} = \oint_2 (-U_2\bar{x} + F_2\bar{t}).(dt \bar{t}) = \int_0^T F_R dt = TF_R$$

etc.

On obtient alors :

$$-TS_R U_R + TF_R - U_{HLL}(TS_L - TS_R) - TF_L + TS_L U_L = 0$$

c'est à dire :

$$U_{HLL} = \frac{F_R - F_L + S_L U_L - S_R U_R}{S_L - S_R}$$

Ce qui constitue la solution du problème de Riemann dans l'approximation HLL.

Pour utiliser cette formule, il faut connaître les vitesses d'ondes  $S_L$  et  $S_R$ . Un choix simple et efficace est celui proposé par Davis (1988) :

$$S_L = \min(u_r - c_r, u_l - c_l)$$

$$S_R = \max(u_r + c_r, u_l + c_l)$$

Ce solveur fournit donc un état intermédiaire  $U_{HLL}$  ou son flux associé  $F(U_{HLL})$ , suffisamment précis pour la plupart des applications. La raison essentielle de l'efficacité de ce solveur est que les propriétés de conservation du système ont été préservées par l'intégration.

*Remarques*

On peut montrer aisément qu'il est possible de calculer directement le flux  $F_{HLL}$  plutôt que le

$$\text{vecteur conservatif } U_{HLL}. \text{ Dans ce cas, on obtient : } F_{HLL} = \frac{S_R F_L - S_L F_R + S_R S_L (U_R - U_L)}{S_R - S_L}.$$

Cette formule est parfois plus pratique que celle qui donne  $U_{HLL}$ , puisque, dans le cadre d'une méthode numérique, on a besoin avant tout des flux.

Par ailleurs, si on effectue un choix particulier pour les vitesses d'ondes :

$S = S_R = -S_L = \max(|u_r - c_r|, |u_l - c_l|, |u_r + c_r|, |u_l + c_l|)$ , on obtient un résultat obtenu par

Rusanov en 1961 :  $F_{RUS} = \frac{1}{2}((F_L + F_R) - S(U_R - U_L))$ . Ce solveur est moins précis que le

solveur HLL, mais il est encore plus robuste, et en raison de la simplicité de son expression analytique, il peut servir à faire des démonstrations rapides.

### 2.3 Résolution numérique par les méthodes de type volumes finis

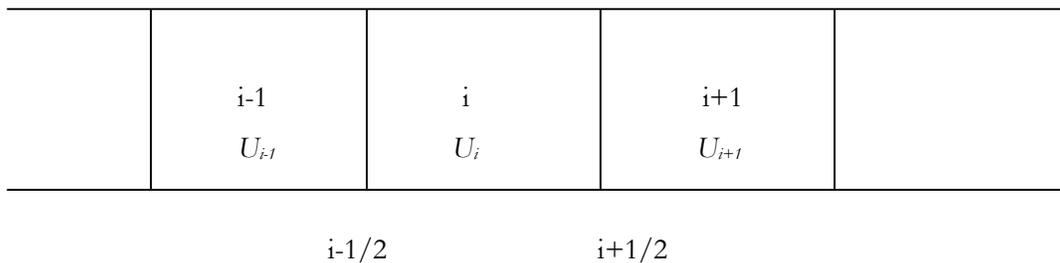
#### 2.3.1 Cas unidimensionnel

##### Le schéma de Godunov (1959)

Maintenant que nous savons comment le problème de Riemann peut être résolu, on reprend la description de base du schéma de Godunov, et nous allons voir comment ces deux ingrédients s'imbriquent.

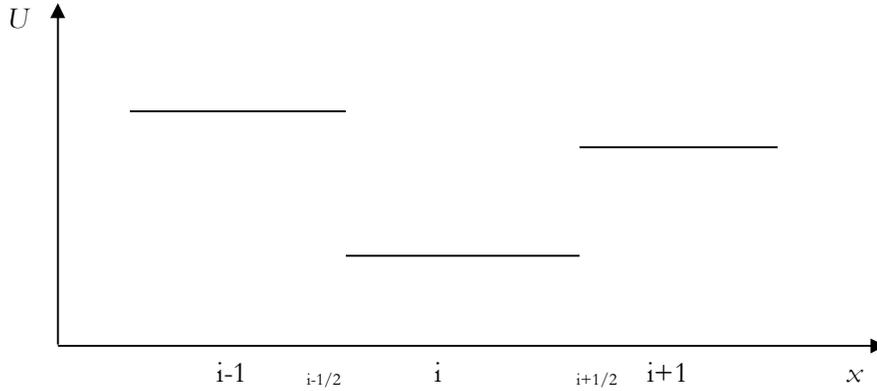
Cette méthode, précise seulement à l'ordre 1, a été en son temps largement supérieure à toutes les autres méthodes. Elle est aujourd'hui à la base de la plupart des codes de calcul industriels ainsi que de toutes les méthodes modernes, plus précises.

Considérons un conduit rectiligne décomposé en cellules :



Les inconnues sont positionnées au centre de chaque cellule. Les cellules communiquent aux autres par les interfaces i-1/2, i+1/2 etc.

Les inconnues  $U_i$  sont constantes par mailles. En fait, seule la moyenne de l'inconnue sera déterminée sur la maille. La solution, dans le conduit, peut être représentée à un instant donné par :



et à l'instant  $t_n$  dans la maille  $i$ , la solution est donnée par :  $U_i^n = \frac{1}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \tilde{U}(x, t_n) dx$ .

Les équations à résoudre pour faire évoluer la solution sont :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left( \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx dt = 0$$

c'est à dire :

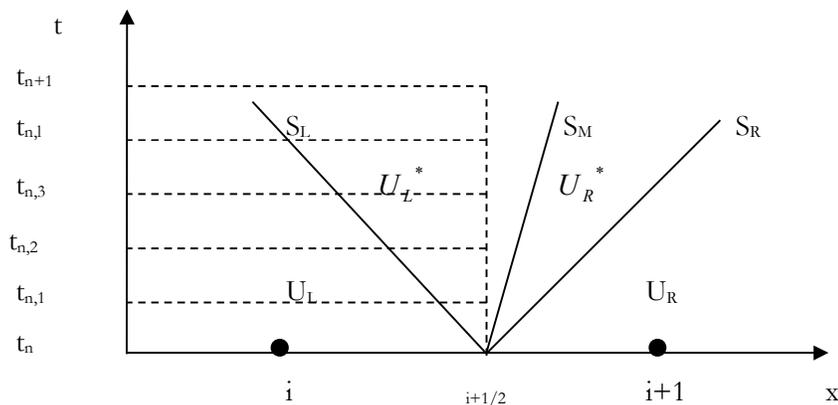
$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (\tilde{U}(x, t_{n+1}) - \tilde{U}(x, t_n)) dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (F_{i+1/2} - F_{i-1/2}) dt = 0$$

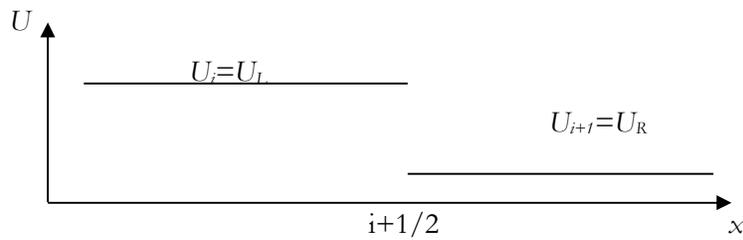
Les flux sont supposés constants durant le pas de temps de  $t_n$  à  $t_{n+1}$ , tant que le pas de temps vérifie la condition de stabilité.

En notant :  $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$  et  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$  on obtient :  $U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2} - F_{i-1/2})$

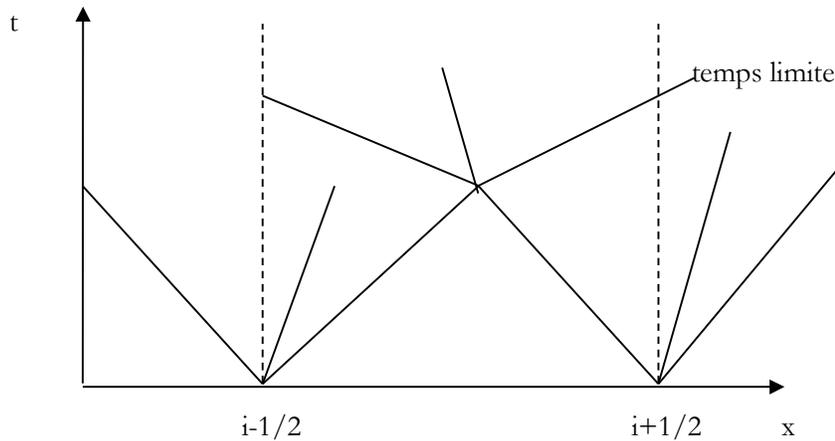
Cette méthode, très simple, reporte toute la difficulté dans le calcul des flux  $F_{i+1/2}$  et  $F_{i-1/2}$ . Ces flux sont constants durant  $\Delta t$  car les données à droite et à gauche de l'interface sont constantes.

En fait, sur chaque interface va se développer le schéma classique à 3 ondes :





Le flux qui nous intéresse  $F_{i+1/2}$ , correspondant ici à  $F(U_L^*)$  est constant à  $t_{n,1}$ ,  $t_{n,2}$ ,  $t_{n,3}$  jusqu'à  $t_{n+1}$ . Ceci reste vrai tant qu'une onde issue d'une autre interface de maille ne vient modifier cela :



A chaque rencontre de deux ondes, l'interaction se traduit en 2 nouvelles ondes se propageant à des vitesses différentes et possédant des intensités différentes.

*Lorsqu'une de ces ondes arrive sur un bord de maille, le flux n'est plus constant car il faut tenir compte des variations véhiculées par ces ondes réfléchies. En choisissant un pas de temps tel qu'aucune onde réfléchie n'ait le temps d'atteindre un bord de maille, on s'assure que le flux reste constant. Cette limitation constitue le critère de stabilité de la méthode :  $\Delta t \leq \Delta x / S_{\max}$ .*

Nous venons donc de voir que les flux  $F_{i+1/2}$  et  $F_{i-1/2}$  étaient constants durant un pas de temps, mais comme les variables sont discontinues sur le bord de maille, quel flux doit on retenir ?

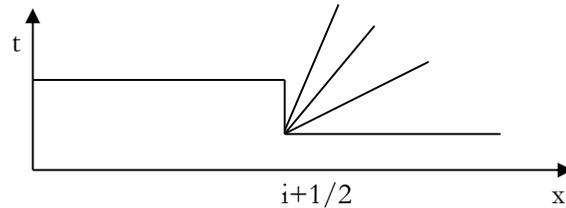
$$F_{i+1/2} = F(U_i^n) \text{ ou } = F(U_{i+1}^n) \text{ ou } = 1/2(F(U_{i+1}^n) + F(U_i^n))??$$

Aucun de ces choix n'est satisfaisant. Il faut choisir le flux résultant de la propagation des différentes ondes, c'est à dire le flux solution du problème de Riemann, exact ou approché :

$$F_{i+1/2} = F(U^*) \quad \text{ou} \quad F^*$$

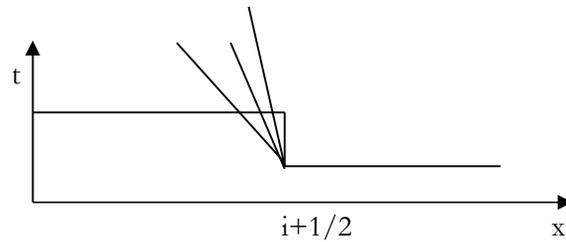
*Remarques*

- Lorsque l'écoulement est positif et localement supersonique :  $u > 0$  et  $M > 1$  ( $u > c$ ), alors  $u - c > 0$  et  $u + c > 0$ . Ceci se résume sur le schéma suivant :



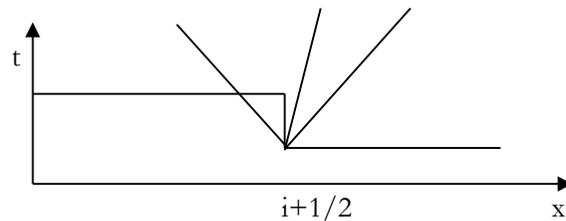
Dans ce cas, le flux  $F_{i+1/2} = F(U_i^n)$

- Lorsque l'écoulement est négatif et localement supersonique :  $u < 0$  et  $M < -1$  ( $u < -c$ ), alors  $u - c < 0$  et  $u + c < 0$ . Ceci se résume sur le schéma suivant :



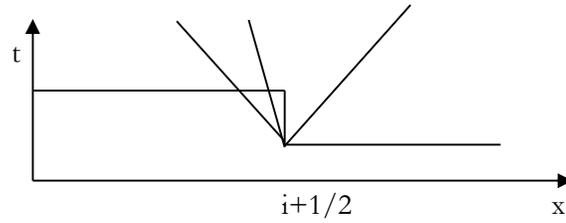
Dans ce cas, le flux  $F_{i+1/2} = F(U_{i+1}^n)$

- Lorsque l'écoulement est subsonique positif, la situation peut se représenter schématiquement comme :



et le flux  $F_{i+1/2} = F(U_L^*)$

- Finalement, lorsque l'écoulement est subsonique négatif on a :



et le flux  $F_{i+1/2} = F(U_R^*)$

Dans le cas du solveur approché HLL, les deux derniers cas ne sont pas distingués :

$F(U_R^*) = F(U_L^*)$  car  $U_{HLL} = U_R^* = U_L^*$  avec  $U_{HLL} = \frac{F_R - F_L + S_L U_L - S_R U_R}{S_L - S_R}$ . En modifiant le

choix des vitesses d'ondes de Davis (1988), on inclut aussi dans cette formule les deux cas supersoniques :

$$S_L = \min(0, u_r - c_r, u_l - c_l)$$

$$S_R = \max(0, u_r + c_r, u_l + c_l)$$

et donc, il suffit de calculer le flux sur le bord de maille par :  $F_{i+1/2} = F(U_{HLL})$ .

*Les méthodes de discrétisation que nous venons de décrire sont qualifiées de « décentrées » car le solveur de Riemann tient compte explicitement du sens d'où l'information physique provient.*

Le schéma de Godunov est donc simplement composé des relations:

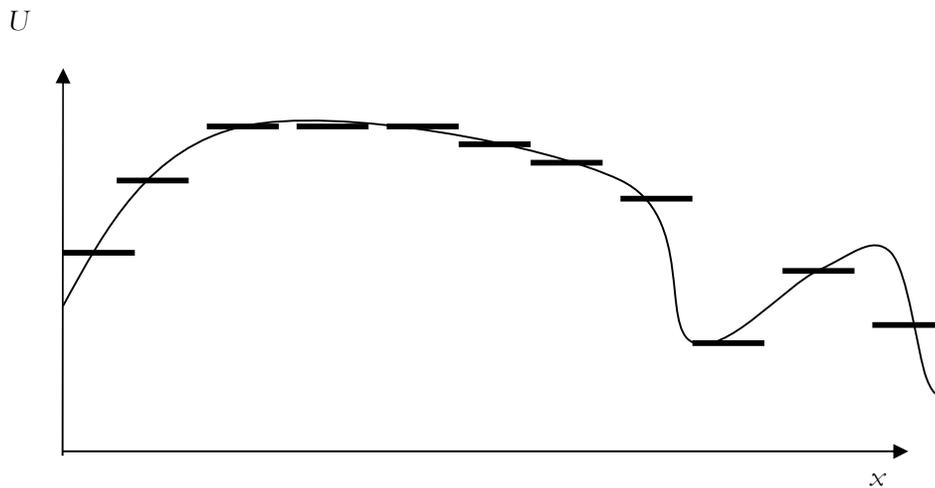
$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2} - F_{i-1/2})$$

avec  $F_{i+1/2} = \frac{S_{R,i+1/2} F_i - S_{L,i+1/2} F_{i+1} + S_{R,i+1/2} S_{L,i+1/2} (U_{i+1} - U_i)}{S_{R,i+1/2} - S_{L,i+1/2}}$ , si l'approximation HLL est

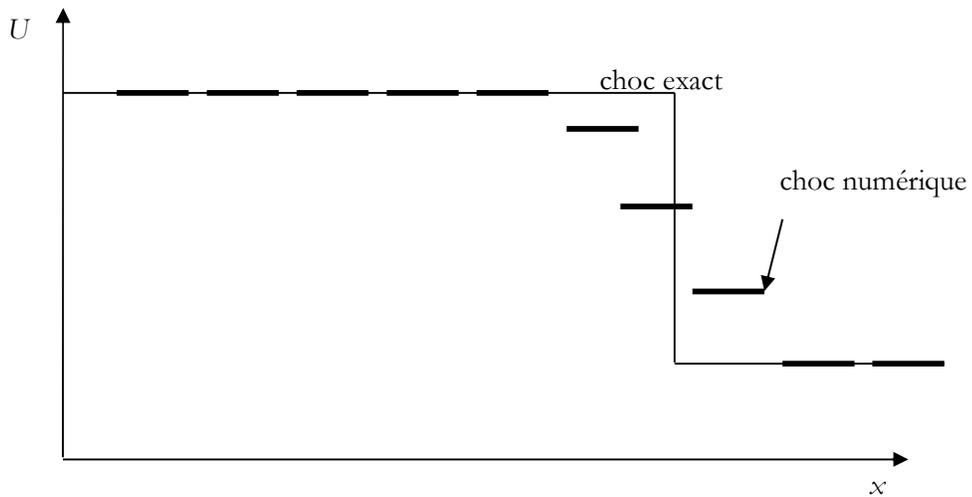
retenue, et  $S_{L,i+1/2} = \min(0, u_{i+1} - c_{i+1}, u_i - c_i)$ ,  $S_{R,i+1/2} = \max(0, u_{i+1} + c_{i+1}, u_i + c_i)$ , pour les estimations des vitesses d'ondes.

### Le schéma de Van Leer ou schéma de Godunov à l'ordre 2

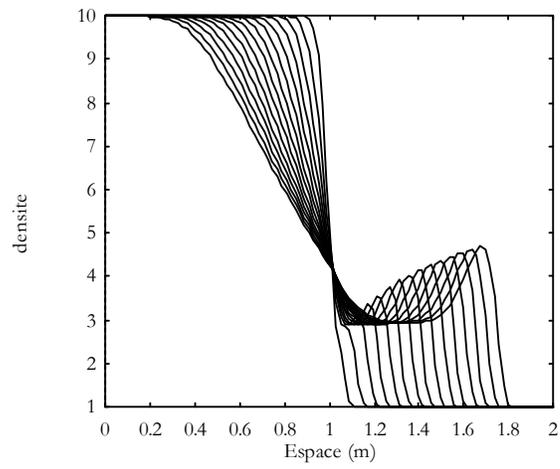
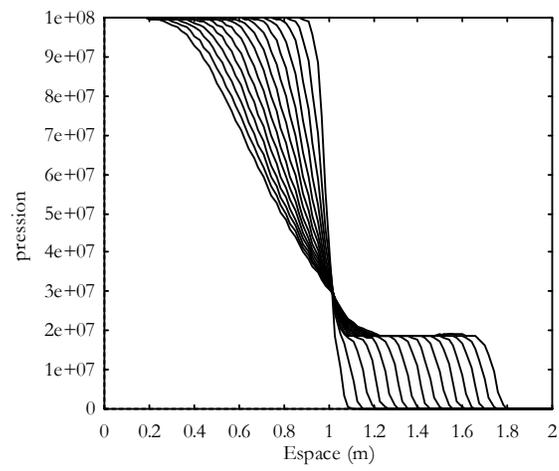
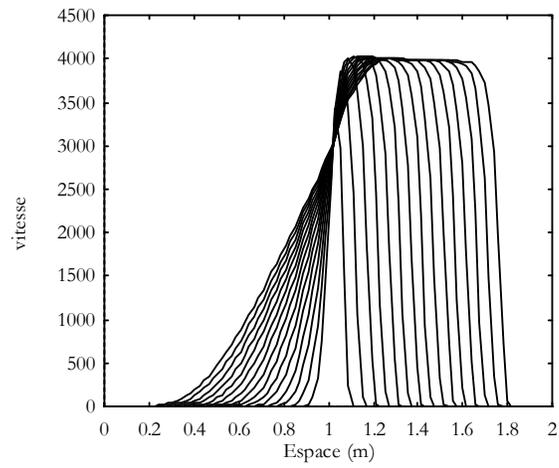
Environ 20 ans après le schéma de Godunov, Van Leer a proposé une extension à l'ordre 2 de ce schéma. Précédemment la solution était approchée par une succession d'états constants :

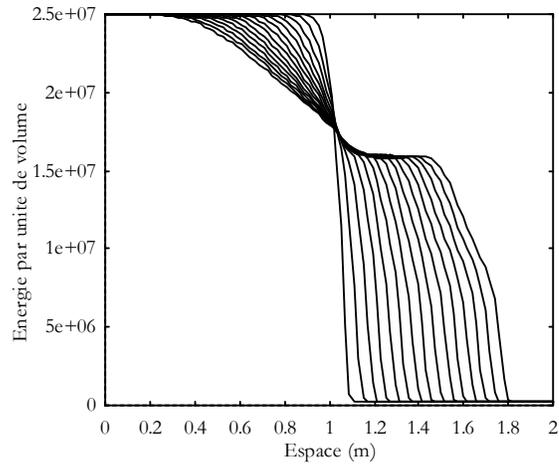


Ce qui induit une certaine erreur lorsque les variations sont violentes. Or, nous avons précisément à prévoir des variations violentes dans la solution : ondes de choc, discontinuités de contact etc. Considérer une discontinuité comme une succession d'états constants n'est pas très précis :



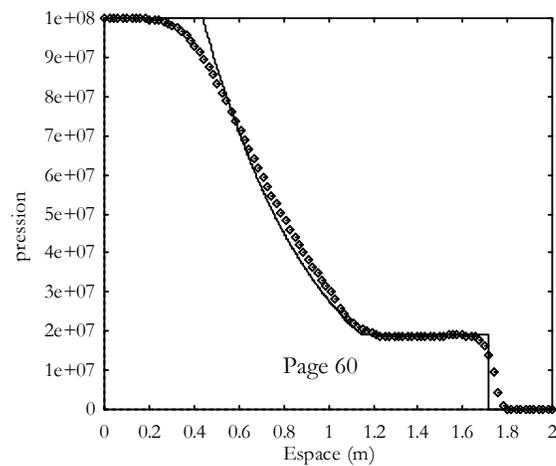
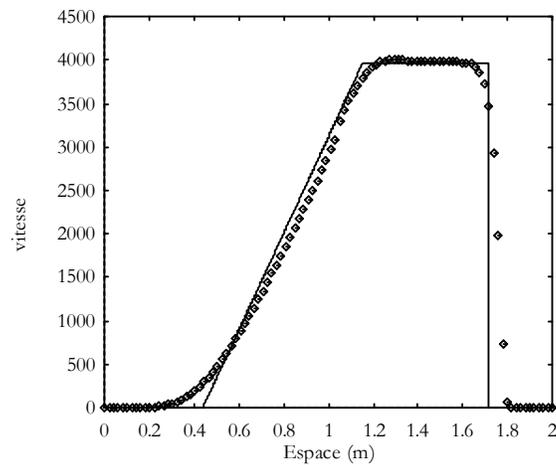
*Exemple.* Le problème du tube à choc a été résolu avec le schéma de Godunov d'ordre 1 et le solveur HLL sur un maillage à 100 cellules. Les résultats sont reportés sur la figure suivante aux à différents instants. Le programme est donné en annexe 2.

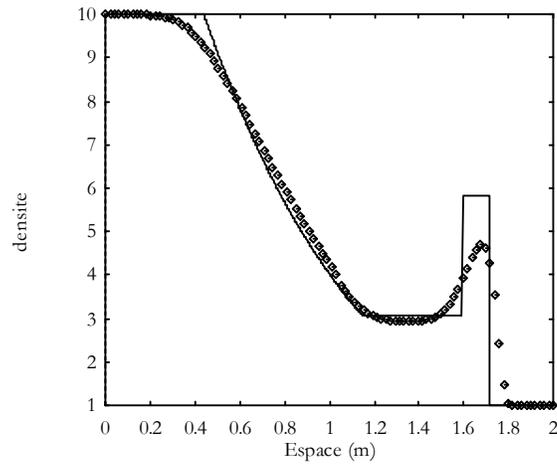




On peut clairement noter la propagation des ondes au cours du temps. On peut remarquer aussi l'étalement des différentes ondes par rapport à la solution exacte du problème de Riemann que nous avons calculée précédemment.

A l'instant final du calcul ( $150 \mu\text{s}$ ), nous allons comparer la solution du calcul avec le schéma de Godunov sur un maillage à 100 points, par rapport à la solution exacte obtenue avec le programme de l'annexe 1.

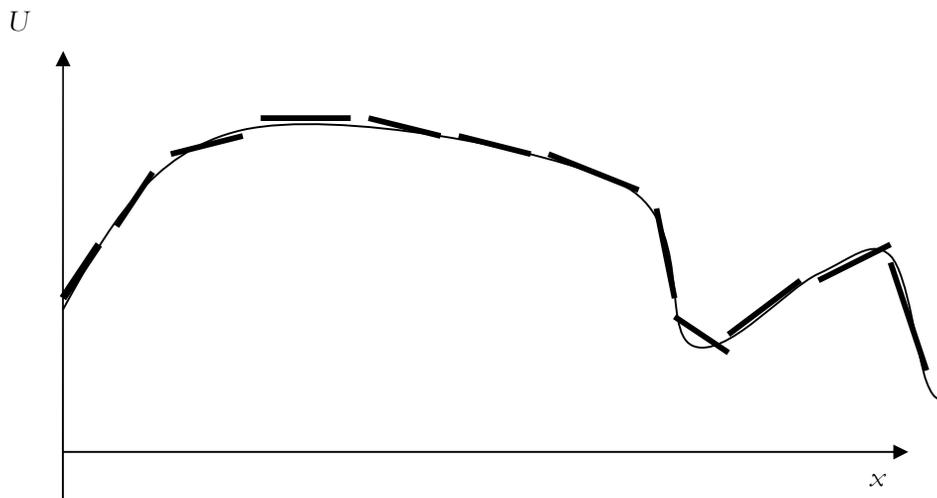




Les zones régulières, où la solution suit des variations continues est mieux calculée que les zones discontinues (choc et discontinuité de contact). Ces deux dernières ondes apparaissent étalées: *elles ont subi les effets de la diffusion numérique.*

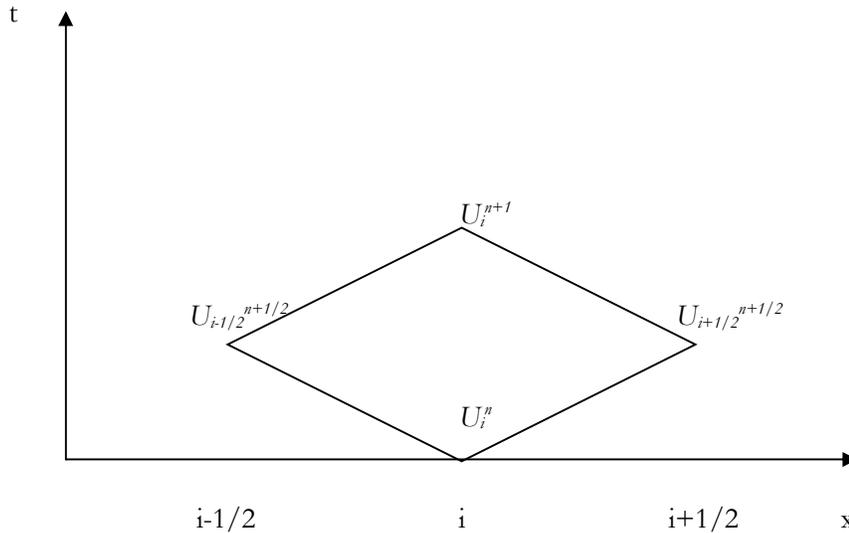
Pour réduire cette diffusion artificielle, due aux erreurs de troncature de la méthode (ordre 1), nous allons envisager l'extension à l'ordre 2 de la méthode.

Il est clair que la précision sera accrue si on approche une courbe quelconque comme une succession de fonction affines, plutôt que par une succession d'états constants :



Van Leer suppose alors 2 inconnues par maille pour chaque variable de l'écoulement : la valeur moyenne de l'inconnue  $U_i$  comme pour le schéma de Godunov, et la pente de la fonction affine  $\delta U_i$ . Nous allons examiner comment se comporte ce schéma en supposant que  $U_i^n$  et  $\delta U_i^n$  sont

connus en tout point du maillage, à l'instant  $t_n$ . Le schéma d'intégration peut être résumé sur le dessin suivant :



Le schéma comporte d'abord une étape de prédiction :

- a) On calcule les variables sur les bords de maille à partir de la connaissance des valeurs moyennes et des pentes :

$$U_{i+1/2}^n = U_i^n + \frac{1}{2} \delta U_i^n$$

$$U_{i-1/2}^n = U_i^n - \frac{1}{2} \delta U_i^n$$

- b) On calcule les flux  $F_{i+1/2}^n = F(U_{i+1/2}^n)$  et  $F_{i-1/2}^n = F(U_{i-1/2}^n)$ .

A l'aide de ces flux prédits et approchés, on fait évoluer la solution sur un demi pas de temps :

$$\frac{U_i^{n+1/2} - U_i^n}{\Delta t / 2} + \frac{F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n}{\Delta x} = 0$$

En fait on a utilisé le schéma de Godunov sur un demi pas de temps, à l'intérieur de la même maille (on n'a utilisé aucune information des mailles voisines), avec un flux approximatif. Ceci n'a pas grande incidence puisqu'on a supposé que sur la maille, les variations sont des fonctions affines : aucune discontinuité n'est supposée exister à l'intérieur de la maille. On en déduit :

$$U_i^{n+1/2} = U_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n)$$

Cette variation temporelle de la valeur moyenne se traduit dans la même variation des grandeurs sur les bords de maille, à l'instant intermédiaire. Ainsi :

$$U_{i+1/2}^{n+1/2} = U_i^n + \frac{1}{2} \delta U_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n)$$

$$U_{i-1/2}^{n+1/2} = U_i^n - \frac{1}{2} \delta U_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n)$$

c) Les étapes précédentes ont permis la détermination des variables aux extrémités de la cellule de calcul. On résout alors le problème de Riemann à partir de ces états « prédits », avec un des solveurs que nous avons présentés auparavant :

$$U_{i+1/2}^* = RP(U_{i+1/2,-}^{n+1/2}, U_{i+1/2,+}^{n+1/2})$$

$U_{i+1/2,-}^{n+1/2}$  provient de l'extrapolation en partant de la maille  $i$ , tandis que  $U_{i+1/2,+}^{n+1/2}$  provient de l'extrapolation en partant de la maille  $i+1$ .

Ainsi, on résout le problème de Riemann avec des états plus proches de la solution. Le calcul des flux en est ainsi amélioré.

d) Etape de conservation.

On applique la loi de conservation classique avec les flux solutions du problème de Riemann :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^* - F_{i-1/2}^*)$$

e) Calcul des pentes  $\delta U_i$

Pour terminer, on calcule les pentes  $\delta U_i$  pour le pas de temps suivant. L'idée de base est que l'on veut que toute oscillation parasite disparaisse au cours de l'évolution temporelle de la solution. Par ailleurs, on sait que tous les schémas d'ordre supérieur à 1 sont oscillants aux discontinuités. On va faire dégénérer le schéma d'ordre 2 en schéma d'ordre 1 aux discontinuités.

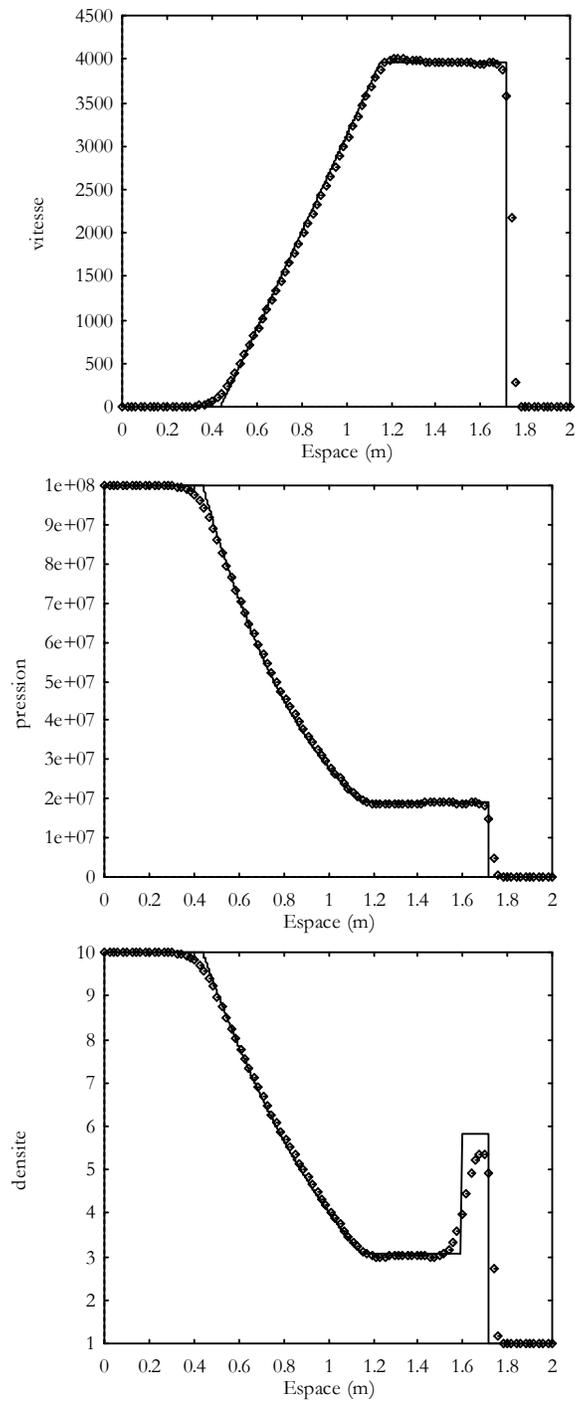
Pour cela, on calcule d'abord les pentes :  $\delta U^+ = U_{i+1} - U_i$  et  $\delta U^- = U_i - U_{i-1}$ .

Si le produit  $\delta U^+ \cdot \delta U^-$  est négatif, c'est que l'on est en présence d'un extremum : une oscillation parasite. On veut réduire cette oscillation et faire dégénérer le schéma à l'ordre 1. En imposant cette pente à zéro, le schéma d'ordre 2 redevient exactement le schéma de Godunov d'ordre 1. De plus, le fait d'imposer la pente à zéro élimine l'oscillation parasite.

Dans le cas où le produit des deux pentes n'est pas négatif, on va retenir la pente minimale entre les deux précédentes, de sorte à n'amplifier aucune oscillation :

$$\delta U = \text{sign}(\delta U^+) \min(|\delta U^+|, |\delta U^-|)$$

A l'aide de ce schéma, une onde de choc est capturée en 3 points environ, une discontinuité de contact en 5-7 points, et les valeurs plateau sont mieux restituées.



Il existe des variantes de ce schéma, ainsi que des améliorations à des ordres supérieurs : schéma PPM de Colella et Woodward, schéma ENO de Harten. Le lecteur intéressé trouvera les ingrédients nécessaires dans l'ouvrage de Toro (1997). A l'heure actuelle, les codes de calcul industriels évolués utilisent le schéma précédent. C'est probablement le meilleur compromis entre précision, robustesse et coût calcul.

### 2.3.2 Cas bidimensionnel

#### Invariance rotationnelle des équations d'Euler

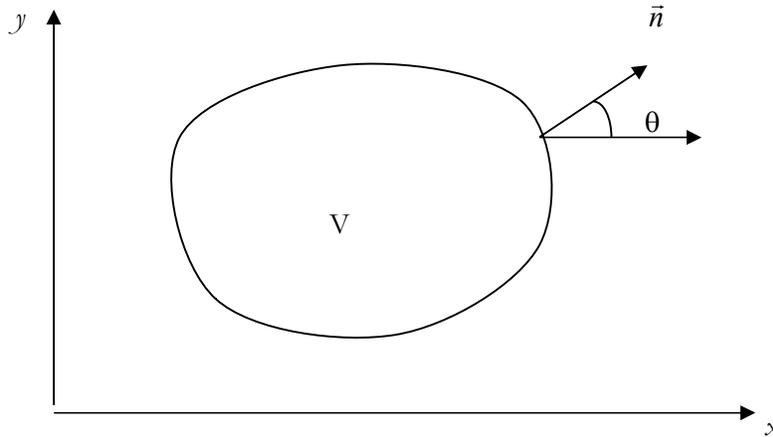
La propriété essentielle que nous allons utiliser est l'invariance rotationnelle des équations d'Euler. En fait, pour le traitement multi-D des lois de conservation hyperboliques, cette propriété est indispensable. Dans le système de coordonnées cartésiennes, les équations d'Euler sous forme conservative s'écrivent :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0$$

avec :

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ (\rho E + P)u \end{pmatrix} \text{ et } G = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + P \\ (\rho E + P)v \end{pmatrix}.$$

On définit maintenant la normale extérieur à une surface  $S$  délimitant le volume de contrôle  $V$  :



$$\vec{n} = (n_1, n_2) = (\cos \theta, \sin \theta)$$

Notons aussi  $\vec{F}$  le vecteur flux  $\vec{F} = (F, G)$  qui apparaît dans les équations d'Euler 2D.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$$

L'intégration de cette équation dans le volume  $V$  s'écrit :  $\int_V \left( \frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \right) dV = 0$ .

Le volume  $V$  est fixe dans le temps, donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V U dV + \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0$$

A l'aide de la définition du vecteur normal on a :  $\vec{F} \cdot \vec{n} = \cos \theta F(U) + \sin \theta G(U)$ .

Nous allons montrer que  $\vec{F} \cdot \vec{n}$  peut être obtenu à l'aide de la matrice de rotation  $T$  et du vecteur  $F(U)$  :  $\vec{F} \cdot \vec{n} = \cos \theta F(U) + \sin \theta G(U) = T^{-1} F(TU)$ , qui est la propriété d'invariance rotationnelle.  $T(\theta)$  est la matrice de rotation :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et son inverse } T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Démonstration*

On calcule d'abord  $\hat{U} = T(U)$  :  $\hat{U} = (\rho, \rho \hat{u}, \rho \hat{v}, \rho E)^T$  avec  $\hat{u} = \cos \theta u + \sin \theta v$  et  $\hat{v} = -\sin \theta u + \cos \theta v$ .

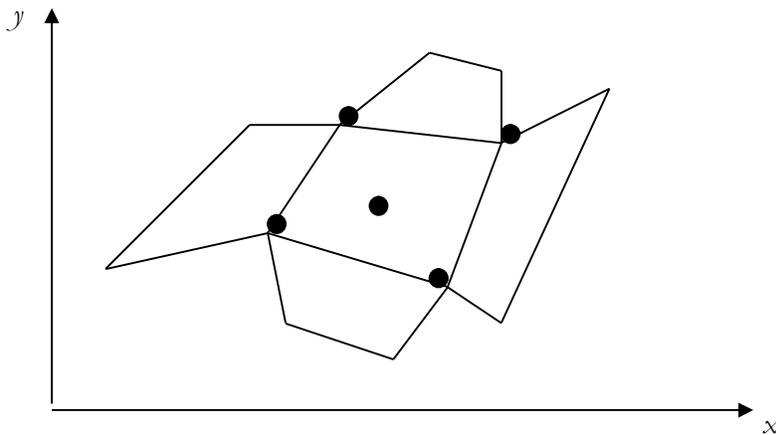
Ensuite,  $\hat{F} = F(\hat{U}) = (\rho \hat{u}, \rho \hat{u}^2 + P, \rho \hat{u} \hat{v}, \hat{u}(\rho E + P))^T$ . En appliquant maintenant  $T^{-1}$  à  $F(\hat{U})$  on obtient :

$$T^{-1} \hat{F} = (\rho \hat{u}, \cos \theta (\rho \hat{u}^2 + P) - \sin \theta (\rho \hat{u} \hat{v}), \sin \theta (\rho \hat{u}^2 + P) + \cos \theta (\rho \hat{u} \hat{v}), \hat{u}(\rho E + P))^T \\ = \cos \theta F + \sin \theta G$$

Formulation volumes finis

Nous allons maintenant utiliser ce résultat dans le cadre d'une méthode aux volumes finis en 2D.

Un maillage VF est composé de triangles ou de quadrangles :



Le maillage est volontairement déformé car il est nécessaire de savoir effectuer des calculs dans ce type de maillage afin de décrire des géométries complexes.

On reprend un résultat précédent :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V U dV + \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0$$

Comme  $V$  est constant dans le temps :  $\frac{\partial}{\partial t} \int_V U dV = V \frac{\partial U}{\partial t}$  ( $U$  désigne maintenant la valeur

moyenne du vecteur conservatif dans la maille). Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \sum_{\text{faces}_{\text{segment}}} \int (\cos \theta F(U) + \sin \theta G(U)) dS \\ &= \sum_{\text{faces}_{\text{segment}}} \int T^{-1} F(TU) dS \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$V \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{\text{faces}_{\text{segment}}} \int T^{-1} F(TU) dS = 0$$

Le flux  $F(TU)$  est donc à déterminer sur chaque bord de maille. D'une maille à l'autre ( $TU$ ) peut avoir une évolution discontinue. Déterminer  $F(TU)$  sur les frontières de la maille revient à résoudre le problème de Riemann des équations d'Euler 2D ayant subies une rotation, pour aboutir au système d'Euler 1D augmenté d'une équation :

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + \frac{\partial F(T\hat{U})}{\partial \hat{x}} = 0$$

où  $\hat{U} = (\rho, \rho \hat{u}, \rho \hat{v}, \rho E)^T$  et  $\hat{F} = (\rho \hat{u}, \rho \hat{u}^2 + P, \rho \hat{u} \hat{v}, \hat{u}(\rho E + P))^T$

avec  $\hat{u} = \cos \theta u + \sin \theta v$  et  $\hat{v} = -\sin \theta u + \cos \theta v$ .

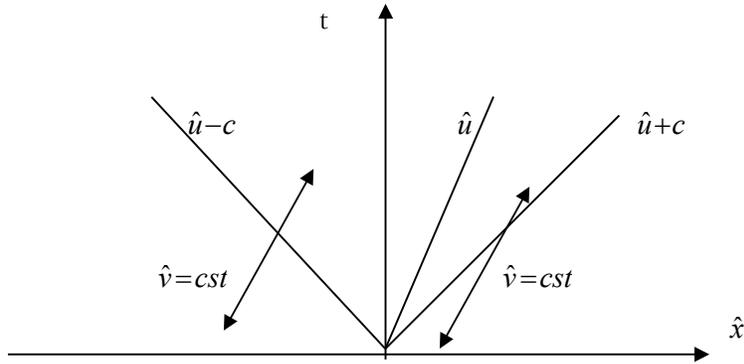
*A l'exception de la troisième équation, on a retrouvé les équations d'Euler 1D dont on sait résoudre parfaitement le problème de Riemann, exact ou approché.*

La troisième équation est découplée des autres :

$$\frac{\partial \rho \hat{v}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \hat{u} \hat{v}}{\partial \hat{x}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \hat{u} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} = 0 \text{ et peut être traitée séparément.}$$

En effet, cette équation n'est rien d'autre que :  $\left. \frac{d\hat{v}}{dt} \right|_{\hat{u}} = 0$ , c'est à dire que  $\hat{v}$  n'a aucune variation

le long des lignes caractéristiques de pente  $\hat{u}$ . C'est aussi un invariant de Riemann pour les lignes de pente  $\hat{u}+c$  et  $\hat{u}-c$ .



La résolution du problème de Riemann suivant la normale au segment fournit  $\hat{U}^* = (\rho^*, \rho^* \hat{u}^*, \rho^* E^*)^T$ . Le rapport des deux premières composantes permet le calcul de  $\hat{u}^*$ . Il est alors aisé de déterminer  $\hat{v}^*$  :

- $\hat{v}^* = \hat{v}_L$  si  $\hat{u}^* > 0$
- $\hat{v}^* = \hat{v}_R$  sinon.

Ceci vient compléter la solution du problème de Riemann 1D .

Par ailleurs, comme le segment est rectiligne et que le problème de Riemann fournit une solution constante entre les deux états droite et gauche , lorsqu'on revient à la formule de discrétisation en

2D, l'intégrale  $V \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{faces_{segment}} \int T^{-1} F(TU) dS = 0$  se simplifie en :

$$V \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{faces} T^{-1} \hat{F}^* L = 0 \quad \text{où } L \text{ est la longueur du segment.}$$

Finalement, le schéma en 2D à l'ordre 1 s'écrit :

$$V_{i,j} \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta t} + \sum_{s=1}^4 L_s T_s^{-1} \hat{F}_s^* = 0, \text{ c'est à dire :}$$

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{V_{i,j}} \sum_{s=1}^4 L_s T_s^{-1} \hat{F}_s^* .$$

### Calculs géométriques

Sur un maillage composé de quadrilatères, on considère un volume de contrôle  $V$  délimité par 4 segments. Chaque sommet a pour coordonnées  $(x_s, y_s)$ . On note :  $\Delta x_s = x_{s+1} - x_s$  et  $\Delta y_s = y_{s+1} - y_s$ . La longueur du segment est donnée par :  $L_s = \sqrt{\Delta x_s^2 + \Delta y_s^2}$ . Les composantes

du vecteur normal sont :  $\cos \theta_s = \frac{\Delta y_s}{L_s}$  et  $\sin \theta_s = -\frac{\Delta x_s}{L_s}$ . La surface du quadrilatère est donnée

$$\text{par : } V_i = \frac{1}{2} |(x_3 - x_1)(y_4 - y_2) - (y_3 - y_1)(x_4 - x_2)|.$$

### Exemple de mise en œuvre

- 0) Calcule des normales, longueur des faces, volume des mailles.
- 1) Pour chaque segment de maille  $s$ , effectuer une rotation des vecteurs  $(U_R, U_L)$  pour obtenir  $\hat{U}_L = T_s U_L$  et  $\hat{U}_R = T_s U_R$ .
- 2) Résoudre le problème de Riemann suivant la normale pour obtenir  $\hat{F}_s^*$  :  $\hat{F}_s^* = F(\hat{U}_s^*)$  avec  $\hat{U}_s^* = RP(\hat{U}_L, \hat{U}_R)$ .
- 3) Effectuer une rotation inverse pour obtenir  $T_s^{-1} \hat{F}_s^*$
- 4) Actualiser la solution en sommant les flux sur les 4 faces.

### Extension à l'ordre 2

Cette extension s'effectue suivant les mêmes idées qu'en 1D. Le maillage est constitué de quadrangles non orthogonaux. Les sommets des quadrangles sont connus et on détermine les barycentres des quadrangles. On considère la cellule  $k$  ayant pour voisins  $k_1, k_2, k_3$  et  $k_4$ .

Les centres de gravité des quadrangles sont notés  $\varpi_k, \varpi_{k_1}$  etc.

- 1) Calcul des pentes. On calcule les pentes comme si le maillage était cartésien, ou plutôt, on calcule les pentes des variables conservatives par rapport aux axes principaux :

$$\delta_x U_{ki} = \frac{U_{ki} - U_k}{x_{\varpi ki} - x_{\varpi k}} \quad \text{pour } i=1,4$$

$$\delta_y U_{ki} = \frac{U_{ki} - U_k}{y_{\varpi ki} - y_{\varpi k}}$$

Ensuite, on applique la procédure de limitation :

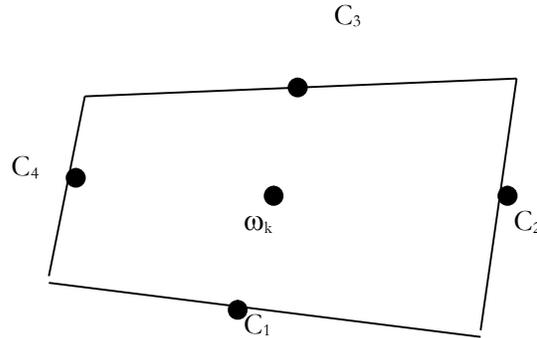
$$P = \prod_{i=1}^4 \delta_x U_{ki}$$

si  $P < 0$ , alors  $\delta_x U_k = 0$ ,

sinon  $\delta_x U_k = \text{sign}(\delta_x U_{k1}) \min(|\delta_x U_{k1}|, |\delta_x U_{k2}|, |\delta_x U_{k3}|, |\delta_x U_{k4}|)$

On effectue les mêmes calculs pour les pentes dans l'autre direction.

- 2) On extrapole les variables sur les bords de maille. Pour cela il faut connaître la position des milieux des segments :



$$U_{Ci}^n = U_k^n + (x_{Ci} - x_{\omega_k})\delta_x^n U_k + (y_{Ci} - y_{\omega_k})\delta_y^n U_k \text{ pour } i=1,4$$

- 3) On détermine les variables sur les bords de maille à l'instant n+1/2 en faisant évoluer la solution sur un demi pas de temps:

$$U_{Ci}^{n+1/2} = U_{Ci}^n - \frac{\Delta t}{2V_i} \sum_{s=1}^4 L_s T_s^{-1} F_s(TU_{Ci}^n)$$

- 4) On résout le problème de Riemann sur chaque face :

$$\hat{U}_{Ci}^* = RP(T_s U_{Ci,+}^{n+1/2}, T_s U_{Ci,-}^{n+1/2})$$

- 5) On applique la loi de conservation :

$$U_k^{n+1} = U_k^n - \frac{\Delta t}{V_i} \sum_{s=1}^4 L_s T_s^{-1} F_s(\hat{U}_{Ci}^*)$$

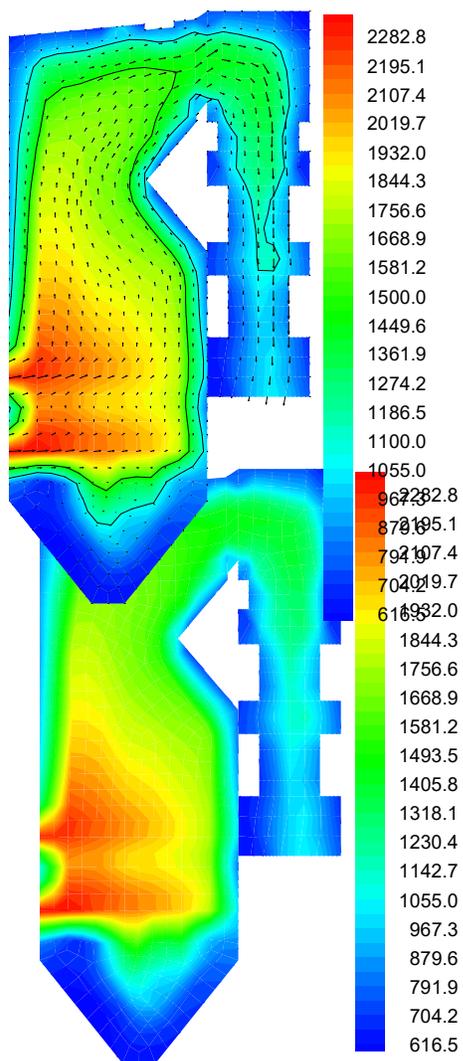
Ce type de méthode permet le calcul de solutions de problèmes d'aérodynamique complexe, de problèmes de combustion etc.

L'extension de ce type de méthode aux écoulements de gaz chargés de particules solides ou liquide, et éventuellement réactifs a été réalisé dans Saurel (1996). L'extension aux problèmes d'écoulements multiphasiques et aux problèmes à interfaces est donnée dans Saurel et Abgrall (1999). Les détails seront apportés aussi dans le cours de DEA.

Dans l'annexe 3 on donne un code de calcul permettant de résoudre les équations d'Euler en 2D, sur des maillages non structurés, éventuellement pour des problèmes d'écoulements réactifs. Ce programme a été utilisé pour réaliser les simulations qui suivent.

Exemple. Une chaudière de grande dimension rejette des polluants (NOx) , qu'il s'agit de réduire par réaction avec du NH3. La réaction de dénitrification dépend de la température, des

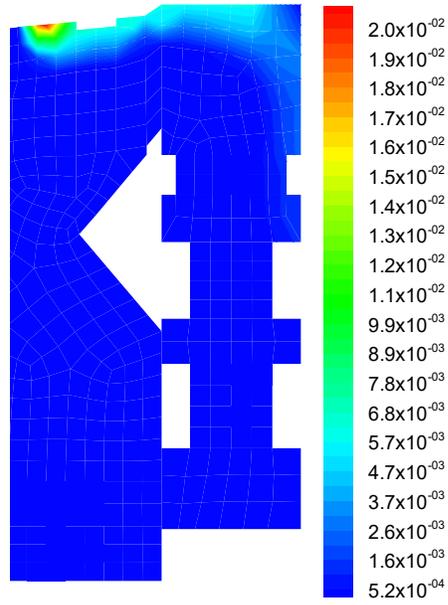
concentrations, et du temps de séjour des réactifs à la température favorable à la réaction. Il est donc nécessaire de calculer tout l'écoulement, en tenant compte des différentes réactions.



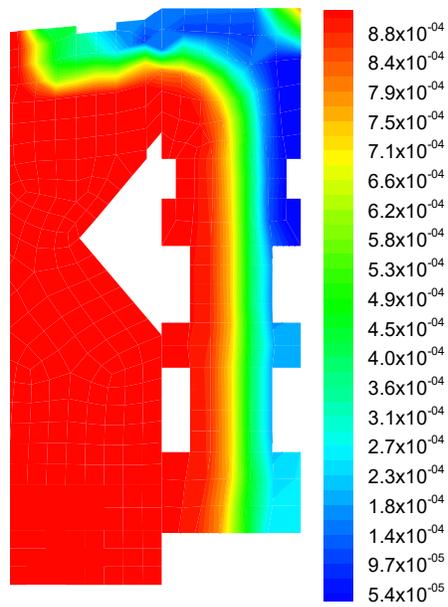
TEMPERATURE

CHAMP DE VITESSE

## ZOOM SUR LA CONCENTRATION EN NO (POLLUANT)



## CONCENTRATION EN NH3



# Chapitre 3

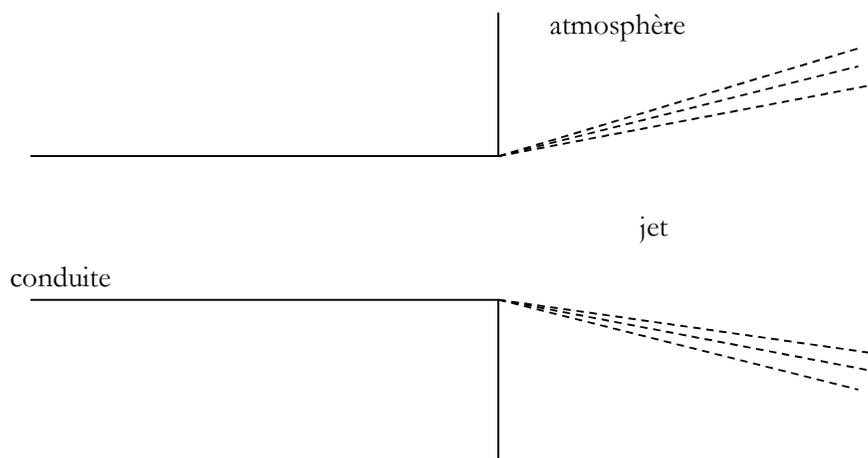
## Traitement des conditions aux limites

Les conditions aux limites et leur traitement est bien sur d'une importance capitale pour la solution. Néanmoins, ce point est rarement abordé dans les ouvrages. On apportera ici des traitements classiques et d'autres moins classiques qui ont montré leur efficacité.

La raison du manque d'information sur le traitement des conditions aux limites est qu'il s'agit bien souvent de résumer des phénomènes physiques multidimensionnels, et donc complexes, dans des relations qui ne peuvent être que monos dimensionnelles. Le rôle du modélisateur et du physicien est donc plus important que dans les parties précédentes.

Exemple.

On cherche à traiter une condition à la limite en sortie d'une conduite où s'écoule un fluide. La conduite débouche sur l'atmosphère.



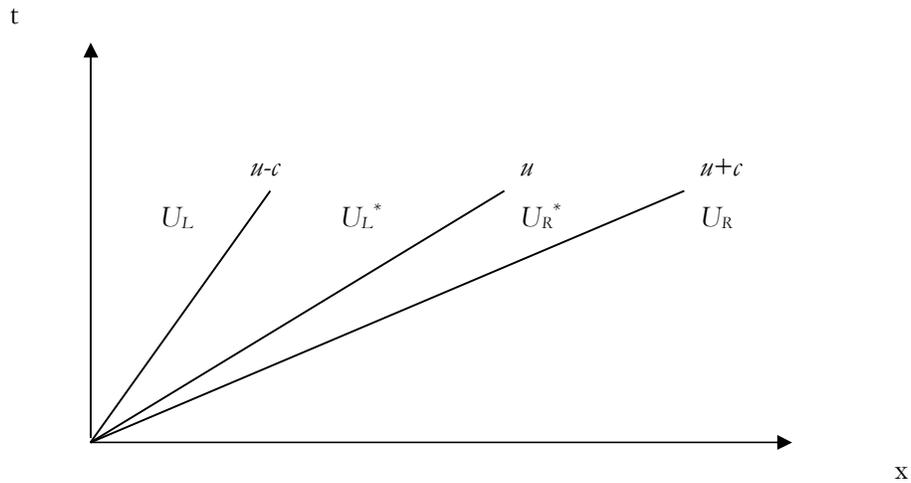
L'écoulement unidimensionnel dans la conduite devient en sortie un écoulement bidimensionnel: un jet divergent (figure ci-dessus) ou un jet convergent. Si on ne désire pas traiter ce problème bidimensionnel en sortie, il faudra trouver des conditions de sortie qui résument ces effets 2D pour la section immédiatement dans la sortie de la conduite. Or, si l'écoulement est subsonique en sortie, les phénomènes se produisant dans le jet vont influencer l'écoulement amont. Il s'agira donc de trouver une approximation raisonnable des phénomènes 2D.

### 3.1 Conditions d'écoulement supersonique

Il s'agit des conditions les plus faciles à traiter.

#### a) Entrée supersonique

On considère par exemple un conduit unidimensionnel, dont on veut imposer des conditions d'écoulement supersonique en entrée ( $u_e > c_e$ ). Examinons le problème de Riemann résultant:

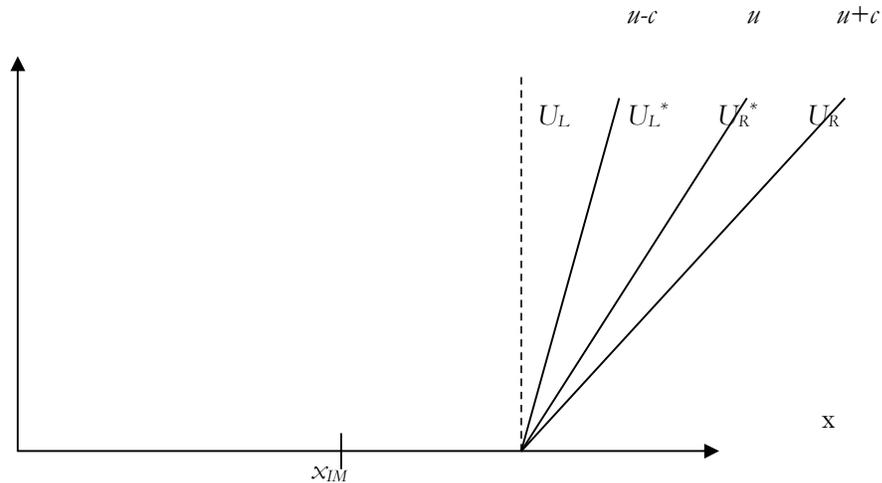


Toutes les ondes partent vers la droite. Pour résoudre les équations dans le reste du domaine, il nous faut disposer du flux sur la ligne verticale  $x/t = 0$ . Or l'état du fluide le long de cette trajectoire n'est rien d'autre que l'état gauche du problème de Riemann:  $U_L$ . Cet état doit donc être complètement imposé:  $\rho_e, u_e, P_e$  ou  $e_e$ .

#### b) Sortie supersonique

On considère maintenant la section de sortie d'un conduit où l'écoulement est supersonique. Le schéma d'onde correspondant est schématisé ci après:

t



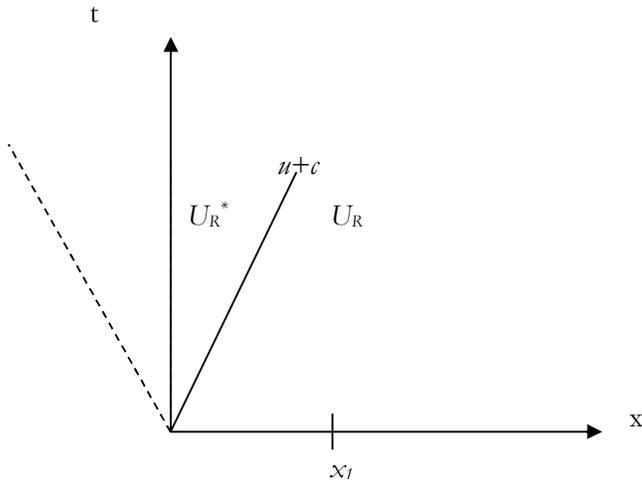
Dans la section de sortie (en pointillés), l'état du fluide correspond à l'état de gauche, c'est à dire à l'état du fluide immédiatement à gauche de la section de sortie. Si le dernier point intérieur au domaine de calcul correspond à l'indice IM, il suffira de prendre pour le calcul des flux dans la section de sortie  $U_s^* = U_{IM}$ .

Le même type de traitement est adopté lorsqu'un écoulement est supersonique et qu'on veut empêcher toute onde de se réfléchir sur les frontières du domaine. On appelle alors ce type de traitement "conditions absorbantes" ou conditions de non-réflexion. Dans le cas subsonique, ce type de traitement est bien plus délicat.

### 3.2 Conditions de paroi, de réflexion ou de symétrie

#### a) Conditions de paroi

Sur une paroi, aucun flux de masse n'est admis. Cependant, le flux de quantité de mouvement faisant intervenir la pression, il est nécessaire de calculer correctement cette grandeur. En particulier, la pression peut évoluer avec le temps en raison des réflexions d'ondes qui se produisent sur elle. Le schéma d'onde peut être représenté de la façon suivante :



La seule onde dont on dispose est  $u+c$ . Les autres sortent du domaine de calcul. Deux possibilités se présentent pour traiter ce type de condition aux limites.

1) On peut utiliser les relations sur les invariants de Riemann traversants cette onde, tant que le fluide est régi par la loi d'état des gaz parfaits.

Ici, seul les invariants suivants sont utilisables :

$$\lambda_3 = u + c \Rightarrow u - 2c / (\gamma - 1) = cst \text{ et } s = cst$$

Ces relations deviennent:  $-2c_0^* / (\gamma - 1) = u_1 - 2c_1 / (\gamma - 1)$  et  $P_0^* / \rho_0^{*\gamma} = P_1^* / \rho_1^{*\gamma}$ . La première relation fournit  $c_0^*$ , et comme  $c^2 = \gamma P / \rho$ , combiné à la seconde relation, fournit alors aisément la pression et la densité.

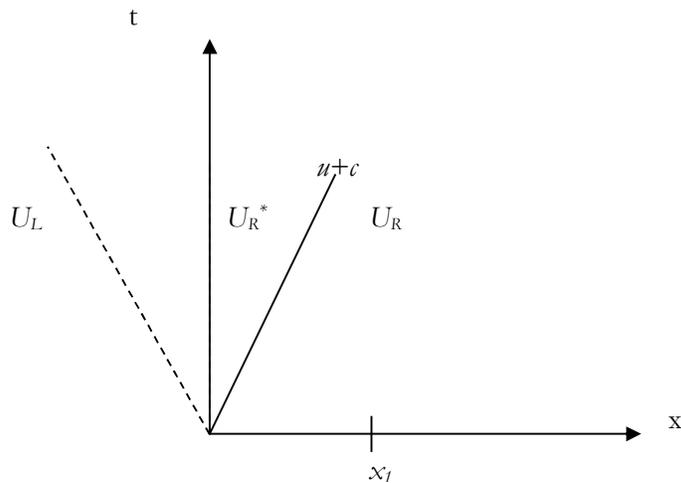
L'autre alternative consiste à utiliser la relation "caractéristique approchée" (on note  $C = \rho c$ ) :

$$P^* - C_R u^* = P_R - C_R u_R.$$

Comme  $u_0^* = 0$  on détermine alors la pression par  $P_0^* = P_1 - C_1 u_1$ , ce qui suffit à calculer le flux. Cette procédure est valable pour des lois d'état autres que celle des gaz parfaits.

2) L'autre procédure consiste à utiliser le solveur de Riemann qui est employé en tout point, et à lui spécifier un état à gauche fictif, tel que la solution du problème de Riemann reproduise bien la présence de la paroi. Cette procédure est celle qui est préférée, car elle permet un traitement routinier des points parois, comme les points intérieurs.

Pour qu'à la paroi il ne passe aucun flux, il faut que le fluide fictif que nous allons spécifier à gauche possède les mêmes propriétés que le fluide de droite: densité et pression, mais une vitesse opposée:



Ainsi, l'état de gauche qui est imposé est tel que  $\rho_L = \rho_R$ ,  $e_L = e_R$  et  $u_L = -u_R$ , et on calcule l'état  $U_R^*$  par le solveur de Riemann qui est employé pour les autres points.

b) Conditions de symétrie

On vient d'expliquer qu'une condition de paroi pouvait être traitée comme un problème d'écoulement symétrique. Le même traitement est donc employé pour traiter de réelles conditions de symétrie.

c) Conditions de réflexion.

Il n'y a aucune différence entre les conditions de paroi, réflexion ou symétrie.

### 3.3 Conditions d'écoulement subsonique

Ce sont les conditions à traiter avec le plus de précaution.

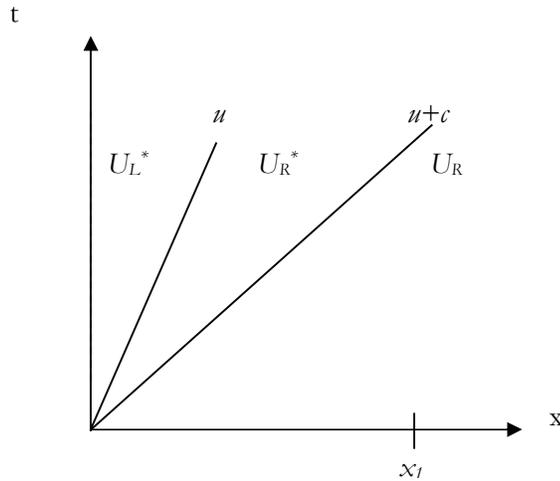
a) Conditions d'entrée

Plusieurs jeux de variables peuvent être spécifiés sur une entrée subsonique, mais tout l'état ne doit absolument pas être fixé. En effet, des informations internes à l'écoulement remontent sur les points limites et il est impératif d'en tenir compte.

L'état du fluide est spécifié par deux variables thermodynamiques (la troisième est déduite de la loi d'état), et une variable cinématique (vitesse). Sur une entrée subsonique, on ne doit spécifier que deux variables:

- débit masse et pression,
- température et pression d'arrêt,
- vitesse et température, etc.

Examinons le schéma d'ondes.



L'état qu'il est nécessaire de déterminer pour le calcul des flux est  $U_L^*$ .

L'état  $U_R^*$  est connecté à l'état  $U_R$  par les invariant de Riemann de l'onde de droite:

$$u - 2c / (\gamma - 1) = cst \text{ et } s = cst$$

qui deviennent

$$u_R^* - 2c_R^* / (\gamma - 1) = u_R - 2c_R / (\gamma - 1) \text{ et } P_R^* / \rho_R^{*\gamma} = P_R / \rho_R^\gamma.$$

Les invariants de Riemann au travers de l'onde  $u$  nous informent que  $u_R^* = u_L^*$  et  $P_R^* = P_L^*$ .

Dès lors, si la pression d'entrée est imposée, ou la vitesse, on peut déterminer la totalité de l'état  $U_R^*$ .

*Exemple.* Pression d'entrée imposée  $\rightarrow P_L^* = \text{donnée}$ .

Sachant que  $P_R^* = P_L^*$  et  $P_R^* / \rho_R^{*\gamma} = P_R / \rho_R^\gamma$ , on en déduit  $\rho_R^*$ . Immédiatement on a

$$c_R^* = \sqrt{\gamma P_R^* / \rho_R^*}.$$

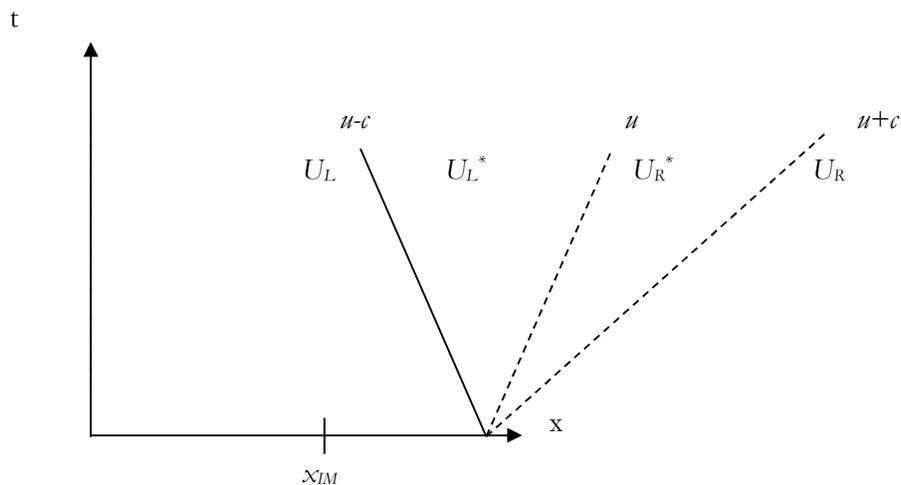
L'invariant de Riemann  $u_R^* = u_R - 2(c_R - c_R^*) / (\gamma - 1)$  fournit la dernière inconnue.

Lorsque la vitesse  $u_R^*$  est déterminée, on a automatiquement la vitesse à gauche  $u_L^* = u_R^*$ . Comme la pression  $P_L^*$  a été donnée, il faut pour préciser la totalité de l'état se donner soit la densité, soit la température (ou une autre variable thermodynamique).

*Exercice.* Donner le principe du calcul lorsque la vitesse et la température d'entrée sont imposées.

b) Conditions de sortie

L'examen du schéma d'onde va nous indiquer la procédure à suivre.



Deux ondes sortent du domaine de calcul et seules les relations au travers de l'onde  $u-c$  sont exploitables. On a:

$$u_L^* + 2c_L^*/(\gamma - 1) = u_L + 2c_L/(\gamma - 1) \text{ et } P_L^*/\rho_L^{*\gamma} = P_L/\rho_L^\gamma.$$

La condition qui est pratiquement toujours donnée est la pression de sortie  $P_L^*$ . Notons que cette donnée n'a rien d'évident. En effet, un jet peut être présent après la sortie de la conduite, et la pression dans le jet ne sera pas immédiatement égale à la pression extérieure. Néanmoins, c'est dans la plupart des cas une approximation raisonnable.

Lorsque  $P_L^*$  est donnée, la densité  $\rho_L^*$  se déduit de  $P_L^*/\rho_L^{*\gamma} = P_L/\rho_L^\gamma$ , et la vitesse du son de  $c_L^* = \sqrt{\gamma P_L^*/\rho_L^*}$ , puis la vitesse de  $u_L^* = u_L + 2(c_L - c_L^*)/(\gamma - 1)$ . Ainsi tout l'état de sortie devient précisé avec la seule donnée de  $P_L^*$ .

Si plus d'informations veulent être imposées en sortie ou en entrée, on viole alors forcément un invariant de Riemann, ou la loi d'état, ce qui revient à violer un principe de conservation, et la solution diverge alors rapidement.

## Références

- Davis, S.F. (1988) Simplified second order Godunov type methods. *SLAM Journal Sci. and Stat. Comput.* 9, No 3, pp 445-473
- Godunov, S.K.(1959) A finite difference method for the numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. *Math. Sb.* 47, pp 357-393
- Godunov S.K., Zabrodine, A., Ivanov, M., Kraiko, A. and Prokopov, G. (1979) Résolution numérique des problèmes multidimensionnels de la dynamique des gaz. *Editions Mir*, Moscou.
- Harten, A., Lax, P.D. and van Leer, B. (1983) On upstream differencing and Godunov type schemes for hyperbolic conservation laws. *SLAM Review*, 25(1), pp 33-61
- Roe , P.L. (1981) Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes. *Journal of Computational Physics* 43, pp 357-372
- Rusanov, V.V. (1961) Calculation of interaction of non-steady shock waves with obstacles. *Journal of Computational Mathematics and Physics USSR*, Vol 1, pp 267-279
- Saurel R., Daniel E. and Loraud J.C. (1994) Two-phase flows: Second order scheme and boundary conditions. *ALAA Journal*, Vol 32, N° 6, pp 1214-1221
- Saurel R. (1996) Numerical analysis of Ram Accelerator employing two-phase combustion. *ALAA Journal of Propulsion and Power*, Vol 12, N°4, pp 708-717
- Saurel R. and Abgrall R (1999) A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows. *Journal of Computational Physics*, Vol 150, pp 425-467
- Toro, E.F. (1997) Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. *Springer Verlag* , Berlin.
- van Leer, B. (1979) Toward the ultimate conservative difference scheme V. A second order sequel to Godunov's Method. *Journal of Computational Physics* 32, p101

**ANNEXE 1. Programme F7ORTRAN pour la résolution du problème de Riemann exact pour les équations d'Euler par la méthode du point fixe. Equation d'état utilisée: Stiffened Gas**

```

-----
Fichier d'entrée 'exact.inp'

#
# fichier d'entree tube a chocs
#
1.0d0      ! longueur du tube
4.4d0      ! parametre gamma de l'equation d'etat à gauche
6.d8      ! parametre Pinf de l'equation d'etat à gauche
1.d9      ! pression initiale à gauche
1000.d0    ! densite initiale à gauche
0.d0d0    ! Vitesse initiale à gauche
1.4d0      ! parametre gamma de l'equation d'etat à droite
0.d0      ! parametre Pinf de l'equation d'etat à droite
1.d5      ! pression initiale à droite
50.d0     ! densite initiale à droite
0.d0      ! Vitesse initiale à droite
200.d-6   ! Instant pour lequel on veut la solution
0.7d0     ! Position de la discontinuite initiale

-----

c
c Solveur de Riemann exact pour les equations d'Euler
c fermées par l'equation d'etat Stiffened Gas
c
c Auteur: Richard Saurel
c
c
c      PROGRAM RIEMANN EXACT
c      IMPLICIT NONE
c      INTEGER i,im
c      PARAMETER(im=1000)

c
c      REAL*8 dx,ltube,temps,vr,vl,xdisc
c      REAL*8 pr,pl,ror,rol,gamar,gamal,pinfil,pinfir
c      REAL*8 xx(im)
c      REAL*8 pstar,ustar,rostarr,rostarl,astarr,astarl,al,ar
c      real*8 vchocr,vchocl,rhoc,uchoc,pc
c      COMMON/EOSPAR/gamal,gamar,pinfil,pinfir

c
c      OPEN(unit=50,file='exact.out',status='unknown')

c lecture des conditions initiales
c      CALL INIT(ltube,pr,pl,rol,ror,vr,vl, Temps,xdisc)
c echantillonage du tube
c      dx=ltube/dfloat(im-1)
c      do i=1,im
c          xx(i)=dx*dfloat(i-1)
c      enddo

c
c
c      ar=dsqrt(gamar*(pr+pinfir)/ror)
c      al=dsqrt(gamal*(pl+pinfil)/rol)

c
c
c      do i=1,im
c
c Resolution du probleme de Riemann
c      CALL riemann(vr,vl,pr,pl,ror,rol,gamar,gamal,
c          & pinfil,pinfil,pstar,ustar,vchocr,vchocl,rostarr,rostarl,
c          & astarr,astarl,al,ar,rhoc,uchoc,pc,xx(i)-xdisc, Temps)

c
c ecriture de la solution
c
c      WRITE(50,*) xx(i),uchoc,pc,rhoc,vchocr,vchocr/ar
c      enddo
145      FORMAT(6(E11.4,1x))

c
c      STOP

```

END

```
-----  
c Procédure de lecture du fichier 'exact.inp' contenant les  
c conditions initiales  
-----  
      SUBROUTINE INIT(ltube,pr,pl,rol,r,ror,vr,vl,Temps,xdisc)  
      IMPLICIT NONE  
      INTEGER I  
      REAL*8 ltube,pr,pl,rol,r,ror,vr,vl,xdisc  
      REAL*8 gamar,gamal,pinfil,pinfir,Temps  
c  
      COMMON/EOSPAR/gamal,gamar,pinfil,pinfir  
c  
      OPEN(unit=100,file='exact.inp',status='old')  
      do i=1,4  
        read(100,*)  
      enddo  
      read(100,*) ltube  
      read(100,*)  
      read(100,*) gamal  
      read(100,*) pinfil  
      read(100,*) pl  
      read(100,*) rol  
      read(100,*) vl  
      read(100,*)  
      read(100,*) gamar  
      read(100,*) pinfir  
      read(100,*) pr  
      read(100,*) ror  
      read(100,*) vr  
      read(100,*)  
      read(100,*) Temps  
      read(100,*)  
      read(100,*) xdisc  
      CLOSE(100)  
      RETURN  
      END  
-----  
c Procédure de résolution du problème de Riemann  
-----  
      subroutine riemann(ur,ul,pr,pl,ror,rol,gammar,gammal,  
s pinfr,pinfl,pstar,ustar,sigmar,sigmal,rstarr,rstarl,  
s astarr,astarl,al,ar,ro,u,p,x,t)  
      implicit real*8 (a-h,o-z)  
c  
c précision de la procédure de convergence  
c  
      data eps/1.d-5/  
      v=x/t  
  
      pstar=(pr+pl)/2.d0  
  
10    continue  
  
      rapr=(pstar+pinfr)/(pr+pinfr)  
      rapl=(pstar+pinfl)/(pl+pinfl)  
c calcul du débit au travers de l'onde de droite  
      call phi(rapr,gammar,res)  
      dmr=dsqrt(gammar*ror*(pr+pinfr))*res  
c calcul du débit au travers de l'onde de gauche  
      call phi(rapl,gammal,res)  
      dml=dsqrt(gammal*rol*(pl+pinfl))*res  
c calcul de la pression et de la vitesse entre les 2 ondes extrêmes  
      pnew=(ul-ur)/(1.d0/dml+1.d0/dmr)+(dml*pr+dmr*pl)/(dml+dmr)  
      ustar=(pl-pr+dml*ul+dmr*ur)/(dml+dmr)  
c test sur la convergence de la pression  
      diff=pnew-pstar  
      if (dabs(diff).gt.eps) then  
        pstar=pnew  
        goto 10  
      endif  
      ustar=(pl-pr+dml*ul+dmr*ur)/(dml+dmr)
```

```

c
c CALCUL DU RESTE DE LA SOLUTION: densites, energies internes etc.
c
c si la pression Pstar > P a droite → choc à droite
c on utilise les relations de Rankine Hugoniot
  if (rapr.gt.1.d0) then
c   choc a dte
c vitesse de l'onde de droite
  sigmar=ur+dmr/ro
c densite et vitesse du son apres passage de l'onde de droite
  rstarr=-dmr/(ustar-sigmar)
  astarr=dsqrt(gammar*(pstar+pinfr)/rstarr)
  else
c Sinon, detente a droite
  rstarr=ror*((pstar+pinfr)/(pr+pinfr))**(1.d0/gammar)
  astarr=dsqrt(gammar*(pstar+pinfr)/rstarr)
  endif

c
  if (rapl.gt.1.d0) then
c   choc a gauche
  sigmal=ul-dml/rol
  rstarl=dml/(ustar-sigmal)
  astarl=dsqrt(gammal*(pstar+pinfl)/rstarl)
  else
c   detente a gauche
  rstarl=rol*((pstar+pinfl)/(pl+pinfl))**(1.d0/gammal)
  astarl=dsqrt(gammal*(pstar+pinfl)/rstarl)
  endif

c
c   affectation de l'etat calcule au noeud intermediaire
c   considere
c
c   cas numero 1 . onde de choc faisant face a gauche
c
  if (v.lt.ustar.and.pl.le.pstar) then
    if (v.lt.sigmal) then
      p=pl
      a=al
      u=ul
      ro=rol
    else
      p=pstar
      a=astarl
      u=ustar
      ro=rstarl
    endif
    gamma=gammal
    pinf=pinfl
  endif

c
c   cas numero 2 . onde de detente faisant face a gauche
c
  if (v.lt.ustar.and.pl.gt.pstar) then
    dif=ul-al
    if (v.le.dif) then
      p=pl
      a=al
      u=ul
      ro=rol
    else
      dif=ustar-astarl
      if (v.lt.dif) then
c   calcul de l'etat a l'interieur de l'eventail de detente
        u=((gammal-1.d0)*ul+2.d0*(v+al))
          / (gammal+1.d0)
        a=u-v
        ro=((a**2*rol**gammal)/((pinfl+pl)*
          gammal))**(1.d0/(gammal-1.d0))
        p=a**2*ro/gammal-pinfl
      else
        p=pstar
        a=astarl
        u=ustar
        ro=rstarl
      endif
    endif
  endif

```

```

        endif
        gamma=gammal
        pinf=pinfl
    endif

c
c      cas numero 3 . onde de choc faisant face a droite
c
        if (ustar.le.v.and.pstar.ge.pr)then
            if(v.le.sigmar)then
                p=pstar
                a=astarr
                u=ustar
                ro=rstarr
            else
                p=pr
                a=ar
                u=ur
                ro=rор
            endif
            gamma=gammar
            pinf=pinfr
        endif

c
c      cas numero 4 . onde de detente faisant face a droite
c
        if (ustar.le.v.and.pstar.lt.pr)then
            som=ustar+astarr
            if (v.le.som)then
                p=pstar
                a=astarr
                u=ustar
                ro=rstarr
            else
                som2=ur+ar
                if(v.lt.som2)then
                    u=((gammar-1.d0)*ur+2.d0*(v-ar))
                    / (gammar+1.d0)
                    a=v-u
                    ro=((a**2*ror**gammar)/((pinfr+pr)*
                    &      gammar)**(1.d0/(gammar-1.d0))
                    p=a**2*ro/gammar-pinfr
                else
                    p=pr
                    a=ar
                    u=ur
                    ro=rор
                endif
            endif
            gamma=gammar
            pinf=pinfr
        endif

c
c      calcul du flux correspondant
c
        f1=ro*u
        f2=ro*u**2+p
        f3=u*((p+gamma*pinf)/(gamma-1.d0)+ro*u**2/2.d0+p)

        return
    end

    subroutine phi(r,gamma,res)
    implicit real*8(a-h,o-z)
        un=1.d0-1.d-8
        fact=(gamma-1.d0)/2.d0/gamma
        if(r.lt.un) then
            res=fact*(1.d0-r)/(1.d0-r**fact)
        else
            res=(gamma+1.d0)/2.d0/gamma*r+fact
            res=dsqrt(res)
        endif
    return
end

```

## ANNEXE 2. Programme FORTRAN pour la résolution des équations d'Euler en 1D par la méthode de Godunov d'ordre 1, à l'aide du solveur de Riemann approché HLL.

```

c
c Methode de Godunov a l'ordre 1 pour les equations d'Euler
c avec le solveur de Riemann HLL
c
c Les equations d'Euler sont augmentees d'une equation
c d'advection decrivant la propagation d'un scalaire
c passif (lambda).
c
c
c Auteur: Richard Saurel
c

      program hll
      implicit real*8(a-h,l-z)
      parameter (im=100,neq=4)

      dimension pp(im),roro(im),uu(im),e(im),xx(im)
      dimension uc(neq,0:im+1),f(neq,0:im),lambda(im)
      dimension fr(neq),fl(neq)

c~~~~~ donnees d'entree ~~~~~
      data gamma/1.4d0/,kmax/150/,kprint/10/
      data ltube/2.d0/,dt/1.d-6/,lambda0/0.5d0/
c~~~~~
      open (unit=10,file='res.hll',status='unknown')
      dx=ltube/dfloat(im-1)

c
c      Conditions initiales
c
c      Grandeurs a gauche

      pc=1.d8
      rhoc=10.d0
      ec=pc/rhoc/(gamma-1.d0)

c
c      Grandeurs a droite
c
      pl=1.d5
      rhol=1.d0
      e1=pl/rhol/(gamma-1.d0)

c
c~~~~~
c      initialisation
c~~~~~
      ihp=50
      do i=1,ihp
        xx(i)=dx*(i-1)
        uu(i)=0.d0
        e(i)=ec
        roro(i)=rhoc
        lambda(i)=lambda0
      enddo
      do i=ihp+1,im
        xx(i)=dx*(i-1)
        uu(i)=0.d0
        e(i)=e1
        roro(i)=rhol
        lambda(i)=lambda0/2.d0
      enddo

      do i=1,im
        uc(1,i)=roro(i)
        uc(2,i)=roro(i)*uu(i)
        uc(3,i)=roro(i)*(e(i)+uu(i)**2/2.d0)
        uc(4,i)=roro(i)*lambda(i)
      enddo

c
c~~~~~

```

```

c          debut de la boucle sur le temps
c~~~~~

      do 100 k=1,kmax
c
c   traitement frontieres
c
      uc(1,0)=uc(1,1)
      uc(2,0)=-uc(2,1)
      uc(3,0)=uc(3,1)
      uc(4,0)=uc(4,1)

      uc(1,im+1)=uc(1,im)
      uc(2,im+1)=-uc(2,im)
      uc(3,im+1)=uc(3,im)
      uc(4,im+1)=uc(4,im)

c~~~~~
c          resolution du probleme de riemann
c~~~~~
c
      do 200 i=0,im
      ror=uc(1,i+1)
      ur=uc(2,i+1)/ror
      er=uc(3,i+1)/ror
      dlambdar=uc(4,i+1)/ror
      eir=er-ur**2/2.d0
      pr=(gamma-1.d0)*ror*eir
      ar=dsqrt(gamma*pr/ror)
      srl=ur+ar
      sr2=ur-ar

c
      fr(1)=ror*ur
      fr(2)=ror*ur**2+pr
      fr(3)=ur*(ror*er+pr)
      fr(4)=ror*dlambdar*ur

c
      rol=uc(1,i)
      ul=uc(2,i)/rol
      el=uc(3,i)/rol
      dlambdal=uc(4,i)/rol
      eil=e1-ul**2/2.d0
      pl=(gamma-1.d0)*rol*eil
      al=dsqrt(gamma*pl/rol)
      sl1=ul+al
      sl2=ul-al

c
      fl(1)=rol*ul
      fl(2)=rol*ul**2+pl
      fl(3)=ul*(rol*el+pl)
      fl(4)=rol*dlambdal*ul
c   Calcul des vitesses d'ondes selon l'approximation de Davis
      sl=dmin1(0.d0,sl2,sr2)
      sr=dmax1(0.d0,sr1,sl1)
c   Calcul du flux
      do j=1,neq
          f(j,i)=(sr*fl(j)-sl*fr(j)+sr*sl*(uc(j,i+1)-uc(j,i)))/(sr-sl)
      enddo
200   continue

c
c ***** etape de conservation *****
c
      do i=1,im
          do iu=1,neq
              uc(iu,i)=uc(iu,i)-dt/dx*(f(iu,i)-f(iu,i-1))
          enddo
      enddo

c ***** impression *****
      if(mod(k,kprint).eq.0)then
          do i=1,im
              roro(i)=uc(1,i)
              uu(i)=uc(2,i)/roro(i)
              en=uc(3,i)/roro(i)
              ei=en-uu(i)**2/2.d0
          enddo
      endif

```

```

        e(i)=ei
        lambda(i)=uc(4,i)/uc(1,i)
        pp(i)=(gamma-1.d0)*roro(i)*e(i)
    enddo
c
    print*, 'iteration:',k
    do 555 i=1,im
        WRITE(10,140) xx(i),uu(i),pp(i),roro(i),e(i),lambda(i),
s            uu(i)/dsqrt(gamma*pp(i)/roro(i))
555    continue
        write(10,*)
    endif
140    format(7(e11.4,1x))

c~~~~~
c    fin de la boucle sur le temps
100 continue
c~~~~~
    stop
end

```

**ANNEXE 3. Programme FORTRAN pour la résolution des équations d'Euler en 2D  
par la méthode de Godunov d'ordre 1, à l'aide du solveur de Riemann approché en  
variables caractéristiques. Le code utilise un maillage non structuré de type éléments  
finis.**

```

C *****
C
C          PROTOTYPE DE CODE 2D EULER INSTATIONNAIRE
C          POUR DES PROBLEMES D'ECOULEMENTS COMPRESSIBLES
C          REACTIFS
C          Schema de Godunov d'ordre 1
C          Solveur de Riemann approche en variables
C          caracteristiques
C
C  Auteur : Richard Saurel
C
C *****

      program main

      implicit real*8(a-h,o-z)
      parameter (nbelem=2000,nesp=2,neq=4)

C
C  geometrie
C
      dimension ivois(nbelem,4),surf(nbelem),grav(nbelem,2)
      dimension xfac(nbelem,4,2),xlfac(nbelem,4),ityp(nbelem)
      dimension ifacvois(nbelem,4),xmid(nbelem,4,2)

C
C  methode
C
      dimension var(nbelem,neq+nesp),vari(nbelem,4,neq+nesp)
      dimension flux(neq+nesp),somflux(neq+nesp)

C
C  gaz
C
      dimension rog(nbelem),ug(nbelem),pg(nbelem),tg(nbelem)
      dimension vg(nbelem),eg(nbelem)

C
C  chimie
C
      dimension yi0(nesp),gammae(nbelem),dmi(nesp),gammai(nbelem,4)
      dimension yi(nesp),yibrul(nesp)

C
C  donnees
C
C  controle
      data kmax/1000000/,kprint/250000/,ifich/10/,nx/10/,ny/10/
      data dt/1.d-10/,cfl/0.9/,kecran/100/

C
C  gaz
C
      data p0/1.d5/,t0/300.d0/,u0/0.d0/,v0/0.d0/
      data temps/0.d0/
C  CL entree
      data tfl/1500.d0/,dmbrul/1.d0/,aireinj/1.d0/
C  CL sortie
      data patm/1.d5/,guniv/9.81d0/

C
C  chimie
C
      especes : 1:h2, 2:o2
      data dmi/2.d-3,32.d-3/
      data yi0/0.d0,1.d0/
      data yibrul/0.d0,1.d0/
      data rmol/8.32d0/

C -----

```

```

3501  format(i5)
3500  format(e20.4)
3001  format(9(e10.3,1x))
c -----
c      ouverture des fichiers

c      call openfile

c
c  lecture de la geometrie
read(100,3501)  il,nface
read(100,3500) ((grav(iel,j),j=1,2),iel=1,il)
read(100,3500) (surf(iel),iel=1,il)
read(100,3500) ((xfac(iel,i,j),j=1,2),i=1,nface),iel=1,il)
read(100,3500) ((xlfac(iel,j),j=1,nface),iel=1,il)
read(100,3500) ((xmid(iel,i,j),j=1,2),i=1,nface),iel=1,il)
read(100,3501) ((ivois(iel,j),j=1,nface),iel=1,il)
read(100,3501) ((ifacvois(iel,j),j=1,nface),iel=1,il)
read(100,3501) (ityp(iel),iel=1,il)

c
c  initialisation

c
c      call calcroeg(p0,t0,yi0,dmi,rmol,e,ro0,gamma)
print*, 'ro0',ro0, 'gamma',gamma
do i=1,il
gammae(i)=gamma
rog(i)=ro0
ug(i)=u0
vg(i)=v0
eg(i)=e
c
c      var(i,1)=rog(i)
var(i,2)=rog(i)*ug(i)
var(i,3)=rog(i)*vg(i)
var(i,4)=rog(i)*(eg(i)+0.5d0*(ug(i)**2+vg(i)**2))
do j=1,nesp
var(i,neq+j)=rog(i)*yi0(j)
enddo
enddo

c
c ***** debut de la boucle sur le temps *****
c
c      do 100 kt=1,kmax
do 200 iel=1,il
if(ityp(iel).eq.1)then
c
c ===== preparation du probleme de riemann =====
c
c      boucle sur les faces
do 300 i=1,nface
jela=ivois(iel,i)
jel=iabs(jela)
jface=ifacvois(iel,i)
c
c      etat gauche
c      gaz
rol = rog(iel)
ul = ug(iel)*xfac(iel,i,1)+vg(iel)*xfac(iel,i,2)
vl = -ug(iel)*xfac(iel,i,2)+vg(iel)*xfac(iel,i,1)
el = eg(iel)
gammal = gammae(iel)
c
c      ktrait=0

c
c      if(ityp(jel).eq.1)then
if(jel.gt.iel)then
ror = rog(jel)
ur = ug(jel)*xfac(iel,i,1)+vg(jel)*xfac(iel,i,2)
vr = -ug(jel)*xfac(iel,i,2)+vg(jel)*xfac(iel,i,1)
er = eg(jel)
gammar = gammae(jel)
else
element deja traite
ktrait=1
endif
endif
c
c

```

```

c   Traitement des CL de type paroi et absorption.
c   Pour les autres, il faut resoudre un demi RP
c
c       if(ityp(jel).eq.0) then
c---   paroi
        ror   = rol
        ur    =-ul
        vr    = vl
        er    = el
        gammar = gammal
        endif
c
c       if(ityp(jel).eq.5) then
c---   paroi
        ror   = rol
        ur    =-ul
        vr    = vl
        er    = el
        gammar = gammal
        endif
c       if(ityp(jel).eq.4) then
c       absorption
        ror   = rol
        ur    = -ul
        vr    = vl
        er    = el
        gammar = gammal
        endif
c ===== resolution pb de riemann =====
c       if(ktrait.eq.0) then
c         if(ityp(jel).eq.2) then
c           call injbrul(tfl,dmbrul,yibrul,aireinj,dmi,rmol,
s            ul,rol,el,vl,gammal,rostar,ustar,vstar,estar,gamma)
c         elseif(ityp(jel).eq.3) then
c           call sortatm(rol,ul,vl,el,gammal,
s            patm,rostar,ustar,vstar,estar,gamma)
c         else
c           call riemann(ror,rol,ur,ul,vr,vl,er,el,gammar,gammal,
s            rostar,ustar,vstar,estar,gamma)
c         endif
c =====
c
c       rangement de l'etat a l'interface (entre cellules)
c
c       vari(iel,i,1)=rostar
c       vari(iel,i,2)=rostar*ustar
c       vari(iel,i,3)=rostar*vstar
c       vari(iel,i,4)=rostar*(estar+0.5d0*(ustar**2+vstar**2))
c       gammai(iel,i)=gamma
c       reactif
c       do j=1,nesp
c         if(ityp(jel).eq.1) then
c           if(ustar.gt.0.d0) then
c             vari(iel,i,j+neq)=rostar*var(iel,j+neq)/var(iel,1)
c           else
c             vari(iel,i,j+neq)=rostar*var(jel,j+neq)/var(jel,1)
c           endif
c         else
c           if(ityp(jel).eq.2) then
c             vari(iel,i,j+neq)=rostar*yibrul(j)
c           elseif(ityp(jel).eq.3) then
c             vari(iel,i,j+neq)=rostar*var(iel,j+neq)/var(iel,1)
c           else
c             vari(iel,i,j+neq)=rostar*var(iel,j+neq)/var(iel,1)
c           endif
c         endif
c       enddo
c
c       sinon cas deja traite
c       else
c         do j=1,neq+nesp
c           vari(iel,i,j)=vari(jel,jface,j)
c         enddo
c         vari(iel,i,2)=-vari(iel,i,2)
c         vari(iel,i,3)=-vari(iel,i,3)
c         gammai(iel,i)=gammai(jel,jface)
c       endif

```

```

300  continue
      endif
c   fin du test sur les Q4
200  continue
c
c ===== bilan : flux a travers une frontiere =====
c
      do 250 iel=1,i1
        if(ityp(iel).eq.1)then
c          initialisation
          do j=1,neq+nesp
            somflux(j)=0.d0
          enddo
c          do 260 i=1,nface
            on integre a travers le segment
              jela=ivois(iel,i)
              jel=iabs(jela)
              xlg=xfac(iel,i)
              xfac1=xfac(iel,i,1)*xlg
              xfac2=xfac(iel,i,2)*xlg
c          variables gaz
            gamma=gammai(iel,i)
            ro=vari(iel,i,1)
            rn=vari(iel,i,2)
            rt=vari(iel,i,3)
            enr=vari(iel,i,4)
            ec=0.5*(rn*rn+rt*rt)/ro
            p=(gamma-1.d0)*(enr-ec)
            vx=rn*xfac1-rt*xfac2
            vy=rn*xfac2+rt*xfac1
c
            flux(1)=rn*xlg
            flux(2)=vx*rn/ro+p*xfac1
            flux(3)=vy*rn/ro+p*xfac2
            flux(4)=(enr+p)*rn/ro*xlg
            do j=neq+1,neq+nesp
              flux(j)=flux(1)*vari(iel,i,j)/ro
            enddo
c
            do j=1,neq+nesp
              somflux(j)=somflux(j)-flux(j)
            enddo
260    continue
c
c          bilan
c
          do j=1,neq+nesp
            var(iel,j)=var(iel,j)+dt*somflux(j)/surf(iel)
          enddo
c
c          terme de gravite
          var(iel,3)=var(iel,3)+dt*var(iel,1)*guniv
        endif
c      fin ityp
250    continue
c
c   calcul des variables primitives
c
      do 111 iel=1,i1
        if(ityp(iel).eq.1)then
          ro=var(iel,1)
          ug(iel)=var(iel,2)/ro
          vg(iel)=var(iel,3)/ro
          e=var(iel,4)/ro
          e=e-0.5d0*(ug(iel)**2+vg(iel)**2)
          do j=1,nesp
            yi(j)=var(iel,j+neq)/var(iel,1)
          enddo
          call eos(e,ro,yi,rmol,dmi,t,p,gamma)
          rog(iel)=ro
          eg(iel)=e
          pg(iel)=(gamma-1.d0)*ro*e
          tg(iel)=t
          gammae(iel)=gamma
        endif
111    continue

```

```

c
c calcul du pas de temps
c
      temps=temps+dt
      dtmin=1.d10
      do iel=1,il
        if(ityp(iel).eq.1)then
          son=dsqrt(gammae(iel)*pg(iel)/rog(iel))
          us=dabs(xfac(iel,4,1)*xlfac(iel,4)*ug(iel))
          vs=dabs(xfac(iel,1,2)*xlfac(iel,1)*vg(iel))
          ds=dsqrt(xlfac(iel,2)**2+xlfac(iel,3)**2)
          dtt=surf(iel)/(us+vs+son*ds)
          if(dtmin.gt.dtt) dtmin=dtt
        endif
      enddo
c      print*, 'dtmin', dtmin
      dt=cfl*dtmin
c
      if(mod(kt,kecran).eq.0)print*,kt,'temps',temps,'dt',dt
      if(mod(kt,kprint).eq.0)then
        do 750 iel=1,il
          if(ityp(iel).eq.1)then
            write(ifich,3001) grav(iel,1),grav(iel,2),
s            ug(iel),vg(iel),pg(iel),tg(iel),rog(iel),
s            var(iel,1+neq)/var(iel,1),var(iel,2+neq)/var(iel,1)
          endif
750      continue
          close(ifich)
          ifich=ifich+10
        endif
100     continue
      stop
      end
c
      subroutine openfile
      implicit real*8(a-h,o-z)
      open (unit=100 , file='mesh' , status='unknown')
      open (unit=10 , file='res1', status='unknown')
      open (unit=20 , file='res2', status='unknown')
      open (unit=30 , file='res3', status='unknown')
      open (unit=40 , file='res4', status='unknown')
      return
      end

c-----
c      initialisation des variables thermo
c-----
      subroutine calcroeg(p,t,yi,dmi,rmol,e,ro,gamma)
      implicit real*8(a-h,o-z)
      parameter (nesp=2)
      dimension yi(nesp),ei(nesp),dmi(nesp),coeff(2,nesp)
      dimension cph2(2),cpo2(2)
c
      data cph2/0.03d2,0.08d-02/
      data cpo2/0.037d2,0.06d-02/
c
      do i=1,2
        coeff(i,1)=cph2(i)
        coeff(i,2)=cpo2(i)
      enddo
c
      sig=0.d0
      do i=1,nesp
        ei(i)=((coeff(1,i)-1.d0)*t+coeff(2,i)*t**2/2.d0)*rmol/dmi(i)
        sig=sig+yi(i)/dmi(i)
      enddo
      dmasse=1.d0/sig
      rgp=rmol/dmasse
c
      ro=p/rgp/t
c
      e=0.d0
      do i=1,nesp
        e=e+yi(i)*ei(i)
      enddo
      gamma=1.d0+p/ro/e

```

```

        return
        end
c
s      subroutine riemann(ror,rol,ur,ul,vr,vl,er,el,gammar,gammal,
        rostar,ustar,vstar,estar,gamma)
c      implicit      real*8 (a-h,m-z)
c
c      initialisation
c
c      pr=(gammar-1.d0)*ror*er
c      ar=dsqrt (gammar*pr/ror)
c
c      pl=(gammal-1.d0)*rol*el
c      al=dsqrt (gammal*pl/rol)
c
c      vitl=ul-al
c      vitr=ur+ar
c      if (vitr.lt.0.d0) then
c        rostar=ror
c        estar=er
c        ustar=ur
c        vstar=vr
c        gamma=gammar
c      elseif (vitl.gt.0.d0) then
c        rostar=rol
c        estar=el
c        ustar=ul
c        vstar=vl
c        gamma=gammal
c      else
c        cr=ror*ar
c        cl=rol*al
c        unsc=1.d0/(cr+cl)
c        pstar=unsc*(cr*pl+cl*pr+cr*cl*(ul-ur))
c        ustar=unsc*(cl*ul+cr*ur+pl-pr)
c
c        if (ustar.gt.0.d0) then
c          rostar=rol+(pstar-pl)/al/al
c          vstar=vl
c          gamma=gammal
c        else
c          rostar=ror+(pstar-pr)/ar/ar
c          vstar=vr
c          gamma=gammar
c        endif
c        estar=pstar/(gamma-1.d0)/rostar
c      endif
c
c      return
c      end
c-----
c      calcul des variables thermo
c-----
c      subroutine eos (e,ro,yi,rmol,dmi,t,p,gamma)
c      implicit real*8 (a-h,o-z)
c      parameter (nesp=2)
c      dimension yi (nesp),dmi (nesp),coeff (2,nesp)
c      dimension cph2 (2),cpo2 (2)
c
c      data cph2/0.03d2,0.08d-02/
c      data cpo2/0.037d2,0.06d-02/
c
c      do i=1,2
c        coeff (i,1)=cph2 (i)
c        coeff (i,2)=cpo2 (i)
c      enddo
c
c      a=0.d0
c      b=0.d0
c      c=-e
c      sig=0.d0
c      do i=1,nesp
c        a=a+yi (i)*coeff (2,i)/2.d0*rmol/dmi (i)
c        b=b+yi (i)*(coeff (1,i)-1.d0)*rmol/dmi (i)
c        sig=sig+yi (i)/dmi (i)
c      enddo
c      delta=b*b-4.d0*a*c

```

```

        delta=dsqrt(delta)
        t=(-b+delta)/2.d0/a
c
        dmasse=1.d0/sig
        rgp=rmol/dmasse
c
        p=ro*rgp*t
        gamma=1.d0+p/ro/e
        return
        end
c-----
c   CL Injection au bruleur
c-----
        subroutine injbrul(t,dmbrul,yi,aireinj,dmi,rmol,
s   ul,rol,el,vl,gammal,rostar,ustar,vstar,estar,gammastar)
        implicit real*8(a-h,o-z)
        parameter (nesp=2)
        dimension yi(nesp),ei(nesp),dmi(nesp),coeff(2,nesp)
        dimension cph2(2),cpo2(2)
c
        data cph2/0.03d2,0.08d-02/
        data cpo2/0.037d2,0.06d-02/
c
c   l'etat left devient etat right
c
        ur=-ul
        vr=-vl
        ror=rol
        er=el
        gammar=gammal
        pr=(gammar-1.d0)*ror*er
        ar=dsqrt(gammar*pr/ror)
c
c   Calcul de l'etat star
c
        do i=1,2
            coeff(i,1)=cph2(i)
            coeff(i,2)=cpo2(i)
        enddo
c
        sig=0.d0
        do i=1,nesp
            ei(i)=(coeff(1,i)-1.d0)*t+coeff(2,i)*t**2/2.d0)*rmol/dmi(i)
            sig=sig+yi(i)/dmi(i)
        enddo
c
        e=0.d0
        do i=1,nesp
            e=e+yi(i)*ei(i)
        enddo
        dmasse=1.d0/sig
        rgp=rmol/dmasse
c
        pstar=pr
        tstar=t
        estar=e
123        continue
        rostar=pstar/rgp/tstar
        ustar=dmbrul/rostar/aireinj
        astarr=ar+(gammar-1.d0)/2.d0*(ustar-ur)
        ptest=pr*(astarr/ar)**(2.d0*gammar/(gammar-1.d0))
        dif=dabs((pstar-ptest)/ptest)
        if(dif.gt.1.d-4) then
            pstar=ptest
            goto 123
        endif
        vstar=0.d0
        gammastar=1.d0+pstar/rostar/estar
        ustar=-ustar
c
        print*, 'ustar',ustar, 'rostar', rostar
        return
        end
c-----
c   CL sortie atmospherique
c-----
        subroutine sortatm(rol,ul,vl,el,gammal,

```

```

s      pstar, rostar, ustar, vstar, estar, gamma)
implicit real*8 (a-h, o-z)
c
c  Complement de l'etat left
c
      gamma=gammal
      pl=(gamma-1.d0)*rol*e1
      al=dsqrt(gamma*pl/rol)
c
      rostar=rol*(pstar/pl)**(1.d0/gamma)
      astar=dsqrt(gamma*pstar/rostar)
      ustar=ul+2.d0/(gamma-1.d0)*(al-astar)
      vstar=vl
      estar=pstar/(gamma-1.d0)/rostar
      return
      end

```